V. A. Gorbátov

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

В. А. Горбатов

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

V. A. Gorbátov

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por María A. Andriánova,
licenciada en matemáticas aplicadas

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000620-6

© Издательство «Высшая школа», 1986
© traducción al español, editorial Mir, 1988

Índice

Prefacio 7
Introducción 8
Capítulo 1. **Sistemas algebraicos** 11
§ 1.1 Conjunto, función, operación. Modos de su prefijación 11
§ 1.2. Concepto del álgebra. Álgebras fundamentales 16
§ 1.3. Relaciones binarias, procedimientos de su planteamiento y sus propiedades
§ 1.4. Retículo 26
§ 1.5. Modelo. Álgebra de relaciones 32
§ 1.6. Axiomática de la teoría de los conjuntos. Minimización de la representación de los conjuntos 41
§ 1.7. Problemas y ejercicios 51
Comentarios 55
Capítulo 2. **Lógica matemática** 56
§ 2.1. Lógica de enunciaciones 56
§ 2.2. Minimización de las funciones booleanas en la clase de las FND 59
§ 2.3. Completitud 65
§ 2.4. Síntesis de los circuitos lógicos 73
§ 2.5. Cálculo de las enunciaciones 85
§ 2.6. Cálculo de los predicados 91
§ 2.7. Problemas y ejercicios 95
Comentarios 101
Capítulo 3. **Teoría de los grafos y mografos** 102
§ 3.1. Grafo ponderado y su planteamiento matricial 102
§ 3.2. Conexión y conexión fuerte de un grafo 108
§ 3.3. Ciclomática 116
§ 3.4. Diferenciación de los grafos y mografos 120
§ 3.5. Estabilidad, cubrimientos y combinaciones en pares 129
§ 3.6. Encaje de los grafos 140
§ 3.7. Coloración de los vértices y de las aristas del grafo. Caracterización de la propiedad de arista 155
§ 3.8. Caracterización de la coloración de los grafos 165
§ 3.9. Problemas y ejercicios 178
Comentarios 180
Capítulo 4. **Teoría de las gramáticas formales y de los dispositivos automáticos** 181
§ 4.1. Gramáticas formales 181
§ 4.2. Etapas principales del diseño de los dispositivos automáticos 188
§ 4.3. Fundamentos aritméticos de los dispositivos automáticos operacionales 195
§ 4.4. Etapa algorítmico del diseño 205
§ 4.5. Diseño abstracto del dispositivo automático 212
§ 4.6. Codificación de los estados interiores 226
§ 4.7. Diseño estructural de los dispositivos automáticos 233
§ 4.8. Simulación de los sistemas de autómatas mediante las redes de Petri 253

§ 4.9. Problemas y ejercicios 266
Comentarios 270
Capítulo 5. **Teoría aplicada de los algoritmos. Análisis de caracterización** 271
§ 5.1. Principios del análisis de caracterización. Construcción de los algoritmos combinatorios 271
§ 5.2. Caracterización de la ordenación parcial del mografo 285
§ 5.3. Caracterización de la conexión de salida de los circuitos lógicos. Minimización estructural 295
§ 5.4. Caracterización de la descomposición del grafo de transiciones en el producto cartesiano parcial 312
§ 5.5. Caracterización y métodos del emplazamiento óptimo de los datos en la memoria del ordenador 322
§ 5.6. Problemas y ejercicios 334
Comentarios 335
Bibliografía 336
Índice alfabético de materias 337

Prefacio

La creación de los sistemas automatizados integrados modernos semejantes a los de proyección automatizada (SPA), de producción automatizada flexible (SPAF), sistemas automatizados de mando (SAM), sistemas automatizados de investigaciones científicas (SAIC), es inconcebible sin la introducción acelerada de los resultados del progreso científico-técnico, especialmente de los logrados en la esfera de las matemáticas.

Para crear y explotar los sistemas automatizados integrados, de uso en complejo, de procesamiento de la información y sus componentes (apoyo matemático, paquetes de programas aplicados, bancos distribuidos de los datos, sistemas incorporados de microprocesores, redes de trasmisión de los datos, sistemas con partición de recursos y procesamiento distribuido de la información) es necesario conocer la matemática discreta, cuya particularidad principal es la ausencia del paso límite y la continuidad, lo que es característico para la matemática clásica.

El libro comprende cinco capítulos e incluye las partes principales de la matemática discreta moderna: los sistemas algebraicos, la lógica matemática, la teoría de grafos y mografos (hipergrafos), la teoría de autómatas y gramáticas formales, la teoría aplicada de algoritmos y el análisis de caracterización. Al final de cada capítulo se ofrecen problemas y ejercicios de dificultad distinta destinados para fijar los conceptos introducidos, algoritmos y construcciones examinados. El último capítulo se dedica a la parte central de la matemática discreta, es decir, al análisis de caracterización, la solución de cuyos problemas es la base en el diseño de los algoritmos óptimos y de apoyos eficientes matemático, de programas de información y técnico para los sistemas automatizados integrados, de uso en complejo, modernos de procesamiento de la información.

El autor

Introducción

El resultado final del trabajo del ingeniero matemático y del de sistemas es un algoritmo realizado mediante un procedimiento de programas, de aparatos o de programas y aparatos. La eficiencia de los medios de cálculo utilizados se define en grado considerable por la optimicidad del algoritmo elaborado, la cual se estima por la complejidad temporal y capacitiva. Como complejidad temporal se toma el tiempo de trabajo del algoritmo, como capacitiva, la capacidad de memoria necesaria para resolver el problema. Las complejidades temporal y capacitiva son funciones de la dimensión del problema. Actualmente, debido a la amplia aplicación de la técnica de cálculo en las distintas esferas de la actividad humana, adquieren cada vez mayor importancia los cálculos sobre estructuras discretas, o sea, los cálculos combinatorios. Numerosas publicaciones se dedican a la investigación de algoritmos sobre estructuras discretas.

El análisis de las dificultades habidas durante la búsqueda de algoritmos eficaces de la resolución de los problemas de la matemática discreta condujo a la enunciación del problema teórico y metodológico central de la matemática discreta, es decir, a la posibilidad de excluir el sondeo de variantes cuando se resuelven los problemas sobre estructuras discretas. Fue presentada la hipótesis que para una amplia clase de problemas de la matemática discreta, de interés para la práctica, no existe un algoritmo eficaz para resolverlos y cuya densidad de trabajo sea una función polinomial de la dimensión del problema. Estos problemas forman la clase de los problemas *NP*-completos, cuya densidad de trabajo para resolverlos se estima por una función exponencial. Según esta hipótesis, los problemas de la dimensión real (equivalente a unas centenas) no pueden ser resueltos eficazmente, incluso mediante los ordenadores de generaciones futuras. En realidad, si imaginémonos un ordenador, para el cual los símbolos del sistema de cálculo utilizado o de la lógica se simulan por los distintos estados de átomos, con la particularidad de que la masa del ordenador es igual a la de la Tierra, entonces, basándose en las leyes generales de la física este ordenador no podrá procesar más de 10^{73} órdenes binarios de la información ni siquiera durante todas las épocas geológicas. Por lo contrario, resolviendo los problemas NP-completos de la dimensión real el volumen de la información procesada supera el valor de 10^{73}. Este hecho suscitó el pesimismo entre

los matemáticos teóricos que centraron la atención principalmente en la investigación del nivel conceptual de la matemática discreta. Los especialistas en matemáticas aplicadas orientaron sus esfuerzos a diseñar algoritmos para resolver problemas de la matemática discreta, lo que se debe a la necesidad práctica del movimiento acelerado "desde el contenido del sentido físico de un problema hacia las construcciones algorítmicas" y, también, hacida un amplio empleo de los ordenadores.

Al resolver el problema de reducción del sondeo de variantes existen grupos de algoritmos: heurísticos y de caracterización. Entre los heurísticos figuran algoritmos de la clase amplia a partir de los FBI-algoritmos (FBI significa fuerza brutal e ignorancia) hasta los "astutos", "ávidos" y otros algoritmos heurísticos. El nombre de algoritmo corresponde al tipo de heurística que determina el procedimiento de la lucha contra el sondeo. Es imposible por principio estimar cómo dista la resolución obtenida por medio de un algoritmo heurístico de la calidad de resolución minimal en el sentido del valor de la funcional. Son libres de este defecto esencial los algoritmos de caracterización, cuya estructura fue propuesta por el autor en los años 60. A base de la caracterización de transformaciones combinatorias realizadas se puede hallar la resolución minimal sin buscar todas las resoluciones equivalentes, excepto su sondeo. El algoritmo de caracterización de la resolución del problema consta de un procedimiento de formación de la equivalencia y de la obtención real de la resolución. El primer procedimiento consiste en la transformación de la información inicial en la forma que permite, sin construir de hecho la resolución, calcular la funcional de su calidad. La densidad de trabajo de los algoritmos de caracterización para problemas prácticos se estima por las funciones polinomiales, cuya potencia no supera 3—5. Dos razones explican la divergencia de los resultados obtenidos por los matemáticos teóricos. En primer término, los matemáticos teóricos estiman la densidad de trabajo de los algoritmos de la resolución de un problema combinatorio por una dependencia exponencial, partiendo del peor caso que, como regla, es artificial y no tiene lugar en la práctica. En segundo término, ellos demuestran estimaciones asintóticas, es decir, consideran el paso límite cuando $n \to \infty$ (n es la dimensión del problema). Pero, en la práctica, la dimensión del problema es un valor finito. Por ejemplo, para obtener la estimación exponencial de la laboriosidad en la coloración de los vértices de un grafo arbitrario hay que basarse en conocer el número máximal $f(n)$ de subgrafos vacíos en un grafo de n vértices:

$$f(n) = \begin{cases} 3^{n/3}, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ 4 \cdot 3^{(n-4)/3}, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 \cdot 3^{(n-2)/3}, & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

sín embargo, esta dependencia es válida solamente para los grafos de una clase única que son complementos de los grafos de Moon—Moser hasta los completos. La resolución de los problemas combinatorios no debe considerarse en general, sino tomando en cuenta la información concreta inicial.

"Del mismo modo que el don de la palabra nos enriquece con opiniones de otras personas, el lenguaje de los signos matemáticos es un medio todavía más perfecto, más exacto y claro..."

N. I. Lobachevski

CAPÍTULO 1
Sistemas algebraicos

§ 1.1. Conjunto, función, operación. Modos de su prefijación

Cualquiera noción de la matemática discreta puede definirse empleando el concepto de conjunto.

Por *conjunto* se comprende la unión, en un todo común, de los objetos muy diferentes por nuestra intuición o nuestro pensamiento. Esta definición intuitiva del concepto de conjunto fue dada por Cantor, fundador de la teoría de los conjuntos. En las matemáticas este concepto es primario y, por consiguiente, no tiene definición rigurosa que satisface las exigencias modernas. Los objetos que forman un conjunto los denominaremos *elementos* del conjunto y, como regla, los designaremos con las letras minúsculas del alfabeto latino. Si el elemento m pertenece al conjunto M utilizaremos la denotación $m \in M$, en caso contrario, la denotación $m \notin M$, donde el signo de pertenencia de un elemento a un conjunto $\in$ es una estilización de la primera letra de la palabra griega *εστι* (ser, estar).

Un conjunto que contiene un número finito de elementos se denomina *finito*. Pero, si un conjunto no contiene cualesquier elementos éste se denomina *vacío* y se denota con $\varnothing$.

Un conjunto puede ser prefijado mediante diversos procedimientos al enumerar los elementos (conjuntos finitos) o al indicar sus propiedades (con ello, para prefijar un conjunto se usan las llaves { }). Por ejemplo, el conjunto M de las cifras del alfabeto decimal puede estar planteado en la forma

$$M = \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ o } M = \{i/i \text{ es entero, } 0 \leqslant i \leqslant 9\},$$

donde a la derecha de la raya inclinada se indica la propiedad de los elementos de este conjunto. El conjunto M de los números pares puede escribirse en la forma $M = \{m/m \text{ es un número par}\}$.

El conjunto M' se denomina *subconjunto* del conjunto M si, y sólo si, todo elemento del conjunto M' pertenece al conjunto M:

$$M' \subset M \leftrightarrow (m \in M' \rightarrow m \in M),$$

donde $\subset$ es el signo de inclusión del subconjunto; $\rightarrow$ es "si..., entonces..", $\leftrightarrow$ es "si, y sólo si..". En particular, los conjuntos M' y M pueden coincidir.

No inclusión del conjunto M' en el conjunto M se denota así: $M' \not\subset M$.

Es obvio, que si el conjunto M_a es un subconjunto del conjunto M_b y el conjunto M_b es un subconjunto del conjunto M_a, ambos estos conjuntos constan de los mismos elementos. Tales conjuntos se llaman *equivalentes:* $M_a = M_b$. Pero, si el conjunto M' es un subconjunto del conjunto M, mientras que el conjunto M no es un subconjunto del conjunto M', entonces el conjunto M' se denomina *subconjunto propio* del conjunto M. Para designar este hecho utilizaremos el símbolo doble de inclusión de subconjuntos $\subset\subset$, es decir, escribiremos $M' \subset\subset M$.

Para cada conjunto M existe un conjunto, cuyos elementos son los subconjuntos del conjunto M y sólo ellos. Tal conjunto lo denominaremos *familia del conjunto M* o *booleano* de este conjunto y lo denotaremos con $B(M)$, mientras que el conjunto M se denominará *universal, universo* o *espacio* y se designará con **1**.

Examinemos la formación del booleano $B(\mathbf{1})$ de un universo $\mathbf{1} = \{y, x, a\}$. El primer conjunto es el conjunto vacío $\varnothing$ que no contiene ningún elemento. Después formemos $\binom{|\mathbf{1}|}{1}\left[\binom{|\mathbf{1}|}{1}\right]$, es decir, el número de combinaciones de $|\mathbf{1}|$ elementos tomados 1 a 1 de los conjuntos que contienen un elemento cada uno, luego $\binom{|\mathbf{1}|}{2}$ conjuntos, cada uno de los cuales contiene dos elementos, ..., y, por fin, el conjunto que contiene todos los elementos del conjunto **1**. Aquí, $|M|$ es el número de elementos del conjunto finito M, lo que en adelante denominaremos *potencia de un conjunto.*

Evidentemente que la potencia $|B(M)|$ de un booleano de un universo M es igual a $2^{|M|}$:

$$|B(M)| = 2^{|M|}.$$

En el caso examinado

$$B(\mathbf{1}) = \{\varnothing\{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\}.$$

Frecuentemente, un conjunto se prefija también en forma gráfica con auyda de *diagramas de Euler.* Por ejemplo, en la fig. 1.1 se expone el conjunto $\{\{a, b, c\}, \{b, d, e\}\}$ en el espacio $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e\}$, donde la línea cerrada llamada *círculo de Euler* corresponde a uno de los conjuntos considerados y limita sus elementos, con ello, el marco, en cuyo ángulo superior derecho se situa **1**, limita los elementos del espacio. Otras formas de prefijar los conjuntos se examinarán a medida que sea necesario.

Uno de los conceptos importantes de la teoría de los conjuntos es el concepto del producto cartesiano de conjuntos.

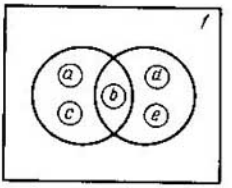


Fig. 1.1

Un conjunto M de tipo

$$M = \{(m_i, m_j)/m_i \in M_a, m_j \in M_b\}$$

se denomina *producto cartesiano $M_a \times M_b$ de los conjuntos M_a y M_b*. Aquí y en adelante mediante los paréntesis ( ) se denota una *sucesión*, es decir, un conjunto con el orden fijado de elementos.

El subconjunto $F \subset M_x \times M_y$ se llama *función*, si para cada uno de los elementos x, $x \in M_x$ no existe más de un elemento $y \in M_y$ de tipo $(x, y) \in F$; con ello si para cada elemento x existe un elemento y de tipo $(x, y) \in F$, la función se denomina *completamente definida (definida en todos los puntos)*, en caso contrario, *parcialmente definida (incompletamente definida)*. El conjunto M_x forma *campo de definición de la función F*, el conjunto M_y *es el campo de valores de la función F*. Frecuentemente, en vez de la denotación $(x, y) \in F$, se utiliza la denotación $y = F(x)$; en esto caso el elemento x se llama *argumento* o *variable*, mientras que y se llama *valor de la función F*.

Comparemos con el producto cartesiano de dos conjuntos un retículo rectangular, cuyos nodos corresponden biunívocamente a los elementos del producto cartesiano. En las figuras el subconjunto del producto cartesiano señalemos rayando los elementos respectivos.

Ejemplo 1.1. En la fig. 1.2 (*a*) está representado un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$ que no es función; en la fig. 1.2 (*b*), un subconjunto que es una función completamente definida; en la fig. 1.2. (*b*), un subconjunto que es una función completamente definida; en la fig. 1.2 (*c*), un subconjunto que es una función parcialmente definida.

El número de argumentos determina el *tipo-ádico de la función*. Anteriormente han sido examinados las funciones monádicas (de un argumento).

Por analogía con el concepto del producto cartesiano de dos conjuntos definamos el producto cartesiano de n conjuntos.

Llámase *producto cartesiano*

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=n}^{n} M_i$$

de los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ el conjunto

$$M = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n})/m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \ldots, m_{i_n} \in M_n\}.$$

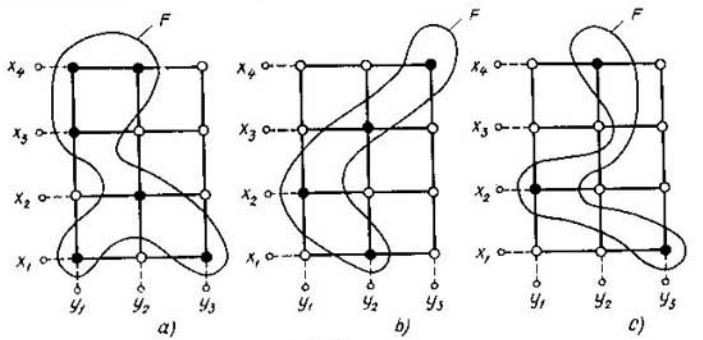


Fig. 1.2

Los elementos del producto cartesiano $M_1 \times M_2 \times M_n$ son todas las posibles sucesiones, cada una de las cuales consta de n elementos, con la particularidad de que el primer elemento pertenece al conjunto M_1, el segundo, al conjunto M_2,..., el elemento n-ésimo, al conjunto M_n.

Si el conjunto M_x en la definición de la función $y = F(x)$ es el producto cartesiano de los conjuntos $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}$ obtenemos la definición de la función n-ádica $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Un caso particular de la función n-ádica $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la operación n-ádica. Por operación n-ádica O_n en el conjunto M se comprende una función n-ádica $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cuyos campos de definición de los argumentos y el campo de valores de la función coinciden: $M_{x_1} = M_{x_2} = \ldots = M_{x_n} = M_y$. De este modo, una operación n-ádica respecto a n elementos del conjunto M determina el elemento $(n + 1)$-ésimo del mismo conjunto.

Examinemos el espacio **1** y, en él, definamos cuatro operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

La *unión* $M_a \cup M_b$ de dos conjuntos M_a y M_b es un conjunto M compuesto de los elementos del conjunto M_a y de los elementos del conjunto M_b:

$$M = M_a \cup M_b = \{m_i / m_i \in M_a,\ M_b\}.$$

La *intersección* $M_a \cap M_b$ de dos conjuntos M_a y M_b es un conjunto M compuesto de los elementos pertenecientes tanto al conjunto M_a, como al conjunto M_b:

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i / m_i \in M_a \text{ y } m_i \in M_b\};$$

a menudo la conjunción "y" se sustituye por el signo &:

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i / m_i \in M_a \,\&\, m_i \in M_b\}.$$

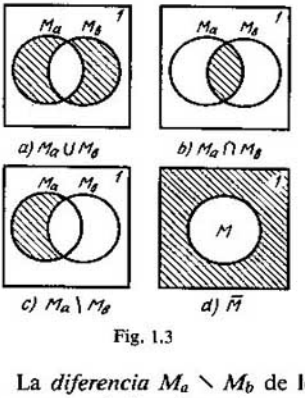


Fig. 1.3

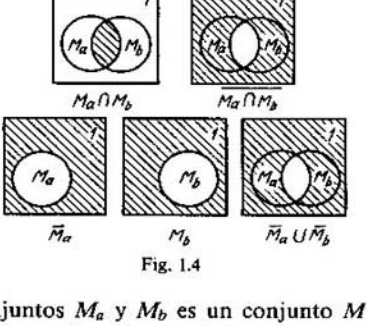


Fig. 1.4

La *diferencia* $M_a \setminus M_b$ de los conjuntos M_a y M_b es un conjunto M compuesto de los elementos pertenecientes al conjunto M_a y no pertenecientes al conjunto M_b:

$$M = M_a \setminus M_b = \{m_i / m_i \in M_a \,\&\, m_i \notin M_b\}.$$

Las operaciones introducidas son binádicas. Consideremos la operación de complemento que es monádica.

El complemento $\overline{M}$ *de un conjunto* M *es el conjunto*

$$\overline{M} = \{m_i / m_i \notin M\}.$$

Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento se ilustran en la fig. 1.3 (*a*, *b*, *c* y *d*), respectivamente; el conjunto resultante de cada operación está representado mediante una zona rayada.

Empleando estas operaciones se puede expresar unos conjuntos por medio de otros, con ello, en primer lugar, se cumple la operación monádica de complemento, luego la de intersección y sólo después la de unión (de diferencia). Para cambiar este orden en la expresión se emplean los paréntesis.

Ejemplo 1.2. Examinemos la operación de complemento de un conjunto que es la intersección de los conjuntos M_a y M_b. Su resultado coincide con la unión de los complementos de estos conjuntos

$$M = \overline{M_a \cap M_b} = \overline{M}_a \cup \overline{M}_b;$$

se puede cerciorarse de esto con ayuda de los diagramas de Euler (fig. 1.4).

De tal modo, un conjunto puede ser prefijado mediante una expresión que tiene identificadores (índices) de conjuntos, operaciones y, tal vez, paréntesis. Semejante modo de prefijar un conjunto se llama *analítico*.

§ 1.2. Concepto del álgebra. Álgebras fundamentales

Llámase *álgebra* A una colección $\langle\ \rangle$ del conjunto M con operaciones prefijadas en éste $S = \{f_{11}, f_{12}, \ldots f_{1n_1}, f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n_2}, \ldots, f_{m1}, f_{m2}, \ldots f_{mn_m}\}$, $A = \langle M, S\rangle$, donde el conjunto M es el *portador* y S es la *signatura* del álgebra. El primer índice inferior del identificador de la operación señala su *tipo-ádico*.

Observación. Para identificar un todo único que contiene objetos de distinta estructura matemática, por ejemplo, un conjunto y operaciones en él, se propuso utilizar el término *colección* y designarlo con los paréntesis angulares $\langle\ \rangle$.

Consideremos *álgebras fundamentales*. El álgebra de tipo $\langle M, f_2\rangle$ se denomina *grupoide*.

Si f_2 es una operación de tipo de multiplicación ($\times$), el grupoide se llama *multiplicativo; si* f_2 es una operación de tipo de adición ($+$), se llama *aditivo*.

Sea $A = \langle M, f_2\rangle$ un grupoide; designemos la operación f_2 mediante $\circ$. Entonces un elemento $e \in M$ se denomina *elemento neutral derecho* del grupoide A, si para cualquier $m \in M$ se cumple la igualdad $m \circ e = m$; el elemento $e \in M$ del grupoide $A = \langle M, \circ\rangle$ se denomina *elemento neutral izquierdo*, si para todos los $m \in M$ se cumple la igualdad $e \circ m = m$. En estas definiciones se utilizaron las expresiones "todos los elementos", "cualquier elemento". En adelante, para abreviar, emplearemos el símbolo $\forall$ (la letra volcada A, la primera letra de la palabra inglesa All, es decir, todo) en vez de las palabras "todos" o "cualquier". Si un elemento e, $e \in M$, del grupoide $A = \langle M, \circ\rangle$ es simultáneamente elemento neutral izquierdo y derecho, se llama *elemento neutral bilateral* o simplemente *elemento neutral*. Ningún grupoide puede tener más de un elemento neutral. En efecto, si

$$m \circ e = e \circ m = m \text{ y } m \circ e' = e' \circ m = m$$

es válido para todos los $m \in M$, entonces

$$e' = e' \circ e = e.$$

Si el grupoide $\langle M, \circ\rangle$ es multiplicativo, el elemento neutral se llama *unidad* y se denota por 1; si es aditivo, el elemento neutral se llama *cero* y se designa por 0.

El grupoide $A = \langle M, \circ\rangle$ se denomina *idempotente*, si su signatura satisface la ley de idempotencia

$$(\forall m \in M)(m \circ m = m).$$

El grupoide $\langle M, \circ\rangle$, cuya signatura satisface la ley conmutativa,

$$(\forall x, y \in M)(x \circ y = y \circ x),$$

se denomina *conmutativo* o *abeliano*. El grupoide $\langle M, \circ \rangle$, en el cual se cumple la ley asociativa,

$$(\forall x, y, z \in M)(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z),$$

se denomina *asociativo* o *semigrupo*.

El semigrupo $\langle M, \circ \rangle$, en el cual se cumplen operaciones inversas (para cualesquiera $a, b \in M$ cada una de las ecuaciones $a \circ x = b$, $y \circ a = b$ tiene solución única), se llama *grupo*.

Ilustremos este concepto de grupo tomando como ejemplo un *grupo de sustituciones* que contiene seis elementos. El grupo de sustituciones fue investigado, resolviendo ecuaciones en radicales, por Galois, célebre matemático francés. Llámase *sustitución* de n-ésimo grado una aplicación biunívoca de un conjunto de n elementos sobre sí.

Consideremos tres elementos: x_1, x_2, x_3. Existen seis permutaciones de tres elementos: $x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_1$, $x_1x_3x_2$, $x_3x_1x_2$, $x_2x_1x_3$, $x_3x_2x_1$. Escribamos dos permutaciones de tres elementos una debajo de otra:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

Esta denotación significa que x_1, pasa en x_2, x_2 en x_3, x_3 en x_1.

El número de posibles sustituciones equivale al número de permutaciones. Introduzcamos las siguientes designaciones para seis sustituciones posibles:

$$a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Introduzcamos la operación de multiplicación $\times$ sobre las sustituciones. Se denomina *producto* de sustituciones una sustitución obtenida como resultado del cumplimiento sucesivo de las sustituciones multiplicadas, de la primera, al inicio, y, luego, de la segunda. Por ejemplo,

$$c \times b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = e.$$

La tabla 1.1 determina la expresión $\alpha \times \beta$, $\alpha, \beta = a, b, c, d, e, f$.

Tabla 1.1

α	β					
	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c
e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

En el álgebra considerada $\langle M, \times \rangle$ se cumple la ley asociativa, pero no se cumple la ley conmutativa.

El álgebra $\langle M, \times, + \rangle$ que según la multiplicación es el grupoide multiplicativo y según la adición, el grupo abeliano, con la partificularidad de que la multiplicación y la adición están ligadas mediante las leyes *distributivas*

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$
$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a,$$

se denomina *anillo*. Un anillo, en el cual todos los elementos diferentes de cero componen un grupo según la multiplicación se llama *cuerpo*. Un cuerpo, cuyo grupo multiplicativo es abeliano, se denomina *campo*.

Examinemos *el álgebra de conjuntos (álgebra de Cantor)*

$$A_k = \langle B(\mathbf{1}), \cup, \cap, {}^- \rangle,$$

cuyo portador es booleano de un conjunto universal $\mathbf{1}$ y cuya signatura son las operaciones de unión $\cup$, de intersección $\cap$ y de complemento $-$. Para las operaciones del álgebra de Cantor se cumplen las siguientes leyes:

conmutativa de unión y de intersección

$$M_a \cup M_b = M_b \cup M_a, \quad M_a \cap M_b = M_b \cap M_a;$$

asociativa de unión y de intersección

$$M_a \cup (M_b \cup M_c) = (M_a \cup M_b) \cup M_c,$$
$$M_a \cap (M_b \cap M_c) = (M_a \cap M_b) \cap M_c,$$

distributiva de intersección respecto a la unión y de unión respecto a la intersección

$$M_a \cap (M_b \cup M_c) = M_a \cap M_b \cup M_a \cap M_c,$$
$$M_a \cup (M_b \cap M_c) = (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup M_c);$$

de idempotencia de unión y de intersección

$$M_a \cup M_a = M_a, \quad M_a \cap M_a = M_a;$$

de operación con los conjuntos universal $\mathbf{1}$ y vacío $\varnothing$

$$M \cup \varnothing = M, \quad M \cap \varnothing = \varnothing, \quad M \cup \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad M \cap \mathbf{1} = M, \quad M \cup \overline{M} = \mathbf{1},$$
$$M \cap \overline{M} = \varnothing;$$

propuesta por *De Morgan*

$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M}_a \cup \overline{M}_b, \quad \overline{M_a \cup M_b} = \overline{M}_a \cap \overline{M}_b$$

y de complemento doble

$$\overline{\overline{M}} = M.$$

El álgebra de Cantor es un semigrupo abeliano según la operación aditiva de unión y multiplicativa de intersección, ya que para estas operaciones se cumplen las leyes conmutativa y asociativa, pero no es un grupo, dado que las ecuaciones $M_a \cup X = M_b$, $M_a \cap X = M_b$ no

tienen soluciones, por ejemplo, para el caso cuando los conjuntos no se intersecan: $M_a \cap M_b = \varnothing$. Por consiguiente, el álgebra de Cantor según las operaciones binádicas $\cup$ y $\cap$ no es un anillo. Esta álgebra pertenece a otra clase de álgebras fundamentales, o sea a la clase de retículos que se examina a continuación.

§ 1.3. Relaciones binarias, procedimientos de su planteamiento y sus propiedades

El concepto fundamental de la matemática discreta es el de *relación* que se utiliza para designar la ligazón entre objetos o nociones.

Llámase *cuadrado del conjunto M* el producto cartesiano de dos conjuntos equivalentes entre sí: $M \times M = M^2$. Se denomina *relación binaria* T en el conjunto M un subconjunto de su cuadrado: $T \subset M^2$. Se dice que los elementos m_i y m_j están en relación T, si $(m_i, m_j) \in T$. La coleccción del conjunto M y la relación binaria $T \subset M^2$, prefijada en él, se denomina *grafo G:*

$$G = \langle M, T \rangle,$$

donde M es el *portador del grafo* (conjunto de los *vértices*); T es la *signatura del grafo* (conjunto de los *arcos*).

Consideremos el planteamiento de la relación binaria empleando una *matriz de adyacencia* y un *conjunto cociente.*

En el planteamiento matricial se emplea una tabla de dos dimensiones, es decir, la matriz de adyacencia, poniendo un elemento del conjunto M en correspondencia biunívoca a cada fila (columna) de la misma. Entonces cada célula (i, j) corresponde biunívocamente a los elementos del conjunto M^2. Una célula (i, j) que corresponde a un elemento perteneciente a $T \subset M^2$ se distingue de algún modo, por ejemplo, la dejan ennegrecida o con una unidad puesta en ella; las otras células se quedan blancas o con ceros inscritos en éstas.

Consideremos un esquema en bloque, propuesto por von Neumann y perteneciente a un ordenador que consta de un conjunto de dispositivos

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

donde a es un dispositivo de entrada, b es un dispositivo aritmético (procesor), c es un bloque de mando, d es una unidad de memoria y e, es un dispositivo de salida.

Examinemos el cambio de información entre los dispositivos m_i y m_j que están en la relación T, si la información pasa del dispositivo m_i en el dispositivo m_j. Esta relación puede ser prefijada en forma de una matriz de adyacencia:

$$B = \begin{array}{c|ccccc|c} & a & b & c & d & e & \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \end{array}$$

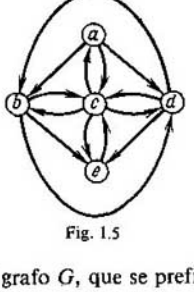


Fig. 1.5

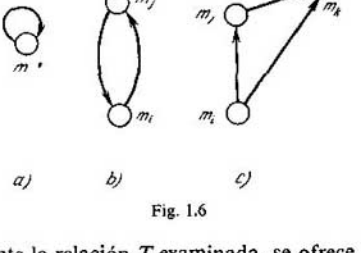


Fig. 1.6

El grafo G, que se prefija mediante la relación T examinada, se ofrece en la fig. 1.5. En esta figura (y también en adelante) los vértices del grafo se representan en forma de círculos (a veces, de puntos), los arcos, en forma de flechas que salen de m_i y entran en m_j, si $(m_i, m_j) \in T$; con ello, el vértice m_i es el *origen de arco* y el m_j, su fin.

Consideremos el planteamiento de la relación binaria empleando el conjunto cociente.

Llámase *entorno de radio unidad del elemento* $m_i \in M$ un conjunto de elementos $m_j \in M$ tales que $(m_i, m_j) \in T$, $T \subset M^2$. A menudo en vez del término *entorno* de radio unidad se utiliza el término *sección*.

Un conjunto de entornos de radio unidad tomados para todos los elementos del conjunto M, al prefijar en él una relación $T \subset M^2$, se denomina *conjunto cociente* M/T del conjunto M respecto a la relación T. El conjunto cociente M/T determina completamente la relación T.

Prefijemos el conjunto cociente para el ejemplo considerado en forma de dos filas. En la primera se colocan los elementos del conjunto M, en la segunda debajo de cada elemento se anota el entorno de radio unidad de éste. Entonces, la segunda fila prefija el conjunto cociente de M respecto a T:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \{b, c, d\} & \{c, d, e\} & \{a, b, d, e\} & \{b, c, e\} & \{c\} \end{array}.$$

La relación binaria prefijada por el grafo $G = \langle M, T \rangle$ (fig. 1.5) puede ser planteada mediante la enumeración de sus arcos:

$M = \{a, b, c, d, e\}$, $T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, e), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, c), (d, b), (d, e), (e, c)\}$.

Examinemos las propiedades más importantes de las relaciones binarias.

Una relación T en el conjunto M se llama *reflexiva*, si para cada elemento $m \in M$ es válido que $(m, m) \in T$. Al prefijar la relación mediante la matriz de adyacencia, el carácter reflexivo se caracteriza por el hecho de que todos los elementos de la diagonal principal están marcados (equivalen a 1 o son

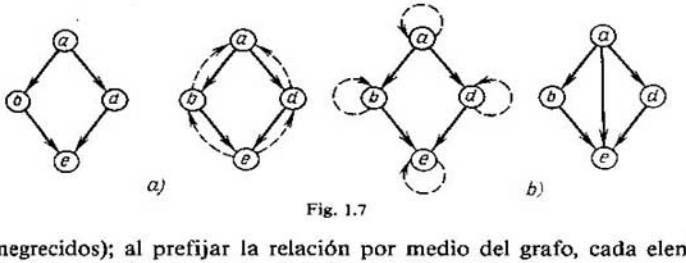


Fig. 1.7

ennegrecidos); al prefijar la relación por medio del grafo, cada elemento tiene *lazo*, es decir, arco de tipo (m, m) (fig. 1.6, *a*).

La relación T en el conjunto M se llama *simétrica* si de $(m_i, m_j) \in T$ se desprende $(m_j, m_i) \in T$, $m_i \neq m_j$.

La matriz de adyacencia de la relación simétrica es simétrica respecto a la diagonal principal, mientras que al prefijar la relación en forma del grafo la consecuencia del carácter simétrico es que entre cualquier par de vértices, que se encuentran en la relación T, existen dos arcos dirigidos contrariamente (fig. 1.6, *b*).

La relación T en el conjunto M se llama *transitiva*, si de $(m_i, m_j) \in T$ y $(m_j, m_k) \in T$ se desprende $(m_i, m_k) \in T$, $m_i, m_j, m_k \in M$; $m_i \neq m_j$, $m_i \neq m_k$, $m_j \neq m_k$.

En el grafo, que prefija una relación transitiva T, para cualquier par de arcos tales que el extremo del primero coincide con el origen del segundo existe un arco tercero que tiene origen común con el primero y extremo común con el segundo (fig. 1.6, *c*), o sea el *arco de cierre transitivo*.

La relación T' prefijada por el grafo parcial G' del grafo G (véase la fig. 1.5) se hace simétrica una vez quitados los arcos (a, b), (a, d), (b, e) y (d, e).

Se denomina *grafo parcial* G' del grafo $G = \langle V, U \rangle$ el grafo de tipo $G' = \langle V, U' \rangle$, $U' \subset U$.

La relación T'', prefijada mediante el grafo parcial G'' del grafo G (fig. 1.5) obtenido una vez quitados todos los arcos, excepto (a, b), (a, d), (b, e) y (d, e) (fig. 1.7, *a*) no posee propiedades del carácter simétrico (σ), ni del reflexivo (ϱ), ni del transitivo (η). Apreciemos a cuál de estas propiedades se aproxima más la relación T''. La *proximidad* $\Delta(T, \alpha)$ de la *relación T a la propiedad* α la apreciaremos por el número mínimal de arcos que hay que quitar o agregar al grafo que plantea esta relación, para que este grafo prefije la relación T que posee la propiedad α, $\alpha = \sigma, \varrho, \eta$. Para el ejemplo examinado (fig. 1.7, *b*).

$$\Delta(T'', \sigma) = 4, \ \Delta(T'', \varrho) = 4, \ \Delta(T'', \eta) = 1.$$

Empleando estas propiedades definamos la *relación binaria de ordenación* que tiene gran importancia teórica y práctica.

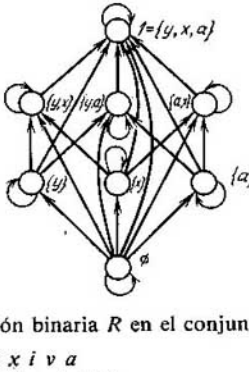


Fig. 1.8

La relación binaria R en el conjunto M, la que tiene las propiedades:

r e f l e x i v a
$(\forall a \in M)\ ((a,\ a) \in R)$;
a n t i s i m é t r i c a
$(\forall a,\ b \in M)\ (((a,\ b) \in R \text{ y } (b,\ a) \in R) \leftrightarrow a = b)$;
t r a n s i t i v a
$(\forall a,\ b,\ c \in M)\ (((a,\ b) \in R \text{ y } (b,\ c) \in R) \leftrightarrow (a,\ c) \in R)$,

se llama *relación de ordenación* y se designa con $\leqslant$. La relación binaria en el conjunto M es antirreflexiva, antisimétrica y transitiva llámase *relación de ordenación estricta* y se designa con $<$. La relación reflexiva y transitiva R en el conjunto M se denomina *relación de suborden.*

Examinemos la relación de inclusión $\subset$. Es reflexiva: $M_i \subset M_i$ (el conjunto M_i incluye a sí mismo); si $M_i \subset M_j$ y $M_j \subset M_i$, entonces $M_i = M_j$ y, por consiguiente, ésta es antisimétrica; si $M_i \subset M_j$ y $M_j \subset M_k$, entonces $M_i \subset M_k$ y la relación $\subset$ es transitiva. La relación de inclusión $\subset$ es la de ordenación $\leqslant$. Un conjunto M, con la relación de ordenación $\leqslant$ prefijada en él, se llama *ordenado* mediante esta relación.

Si cualesquiera dos elementos m_i y m_j de un conjunto ordenado están en la relación de ordenación $m_i \leqslant m_j$ o $m_j \leqslant m_i$ este conjunto se denomina *linealmente ordenado,* es caso contrario, *parcialmente ordenado.*

Un ejemplo del conjunto parcialmente ordenado se ofrece en la fig. 1.8 (como relación $\leqslant$ se examina la relación de inclusión $\subset$).

Con frecuencia un conjunto parcialmente ordenado se representa en forma de grafos $H = \langle V, \leqslant \rangle$ que tienen omitidos todos los lazos y arcos de cierre transitivo. El grafo $H = \langle V, \leqslant \rangle$ que prefija un conjunto parcialmente ordenado con los lazos alejados y los arcos de cierre transitivo omitidos se denomina *diagrama de Hasse H.* En la fig. 1.9, *a* se representa el diagrama de Hasse H que expresa el conjunto parcialmente ordenado mostrado en la fig. 1.8. El diagrama de Hasse es conocido desde fines del siglo XIX

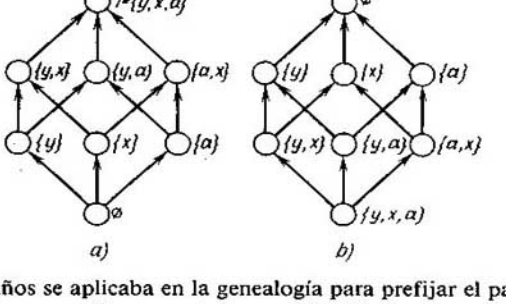


Fig. 1.9 *a)* *b)*

y durante muchos años se aplicaba en la genealogía para prefijar el parentesco. El concepto de mayor directo se plantea con facilidad en un conjunto parcialmente ordenado por la siguiente definición: m_i *cubre* m_j, esto significa que $m_j < m_i$ y no existe ningún elemento m_x tal que $m_j < m_x < m_i$.

Consideremos el subconjunto M' del conjunto ordenado M. Si existe un elemento $m_\alpha \in M$ tal que $m_i \leqslant m_\alpha$ para cualquier elemento m_i del subconjunto M', este elemento se denomina *mayorante* del subconjunto M'. De modo análogo, si existe un elemento $m_\beta \in M'$ tal que $m_\beta \leqslant m_i$ para cualquier elemento m_i del subconjunto M', el elemento m_β se llama *menorante* del subconjunto M'. En el diagrama de Hasse H (fig. 1.9, *a*) el elemento $\{x\}$ es la menorante del subconjunto $\{\{y, x\}, \{a, x\}, \{y, x, a\}\}$, el elemento $\{a, x\}$ es la mayorante del subconjunto $\{\{x\}, \{a\}, \varnothing\}$.

Si la mayorante m_α de un subconjunto M' pertenece a M', $m \in M'$, se llama *elemento maximal* $m_{\max}$ de este subconjunto. De modo análogo, si la menorante m_β de un subconjunto M' pertenece a M', $m_\beta \in M'$, se denomina *elemento minimal* $m_{\min}$ del subconjunto M'. En el diagrama de Hasse H (fig. 1.9, *a*) los elementos minimal y maximal del subconjunto $\{\{x\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{y, x, a\}\}$ son $\{x\}$, $\{y, x, a\}$, respectivamente. Para un par de elementos de un conjunto linealmente ordenado siempre existen elementos maximal (equivalente a uno de ellos) y minimal (equivalente al otro elemento). Un par de elementos de un conjunto linealmente ordenado se llaman con frecuencia *comparables*, o sea, elementos m_i, m_j, para los cuales $m_i \leqslant m_j$ o $m_j \leqslant m_i$.

Si un conjunto de mayorantes (menorantes) tiene, a su vez, elemento maximal (minimal), llámase *cota superior (inferior) del subconjunto* M' y se denota por medio de $\sup M'$ ($\inf M'$).

La cota superior (inferior) del subconjunto M' que pertenece a M' se denomina *elemento máximo (mínimo) del subconjunto* M'.

Teorema 1.1. *Un conjunto ordenado M no contiene más de un elemento máximo (mínimo).*

□ Demostremos el teorema para el caso de elemento máximo. Efectiva-

mente, si m_α, m_β son dos elementos máximos, $m_\alpha \leqslant m_\beta$ y $m_\beta \leqslant m_\alpha$, de donde $m_\alpha = m_\beta$ debido a la antisimetría de $\leqslant$. Para el elemento mínimo la demostración es análoga. ■

Si el elemento máximo de un conjunto ordenado M existe, lo denominaremos *unidad* y denotaremos por medio de 1. Si el elemento mínimo de un conjunto ordenado M existe, lo denominaremos *cero* y denotaremos por medio de 0.

En una familia ordenada del conjunto M el conjunto vacío corresponde al elemento cero y M, al elemento unidad.

Un elemento que cubre 0 en el conjunto parcialmente ordenado M, es decir, el elemento minimal en un subconjunto del conjunto M obtenido por medio de excluir 0, se denomina *átomo* o *punto*. Al prefijar una familia del conjunto M por un grafo al punto (átomo) se le corresponde un elemento del universo.

Por *isomorfismo* entre dos conjuntos ordenados M y M^* comprenderemos una correspondencia biunívoca η entre M y M^*, tal que de $m_i \leqslant m_j$ se desprende $\eta(m_i) \leqslant \eta(m_j)$ y de $\eta(m_i) \leqslant \eta(m_j)$ se desprende $m_i \leqslant m_j$.

Dos conjuntos ordenados M y M^* se denominan *isomorfos* si, y sólo si, entre ellos existe el isomorfismo.

Por relación $\overline{R}$ inversa de R se comprende una relación tal que $(m_i, m_j) \in \overline{R}$ si, y sólo si, $(m_j, m_i) \in R$.

Principio de dualidad. La relación inversa de la relación de ordenación también es la relación de ordenación.

Se llama *dual* el conjunto parcialmente ordenado M el conjunto parcialmente ordenado $\overline{M}$ definido sobre el mismo portador empleando la relación inversa. En la fig. 1.9 (*b*) se ofrece el diagrama dual al diagrama de Hasse (fig. 1.9, *a*). Muchas veces el principio de dualidad se formula del modo siguiente: *si el teorema es válido para los conjuntos parcialmente ordenados también es válido su teorema dual.*

Es evidente que el subconjunto M' del conjunto ordenado M es el conjunto ordenado y si es lineal, el subconjunto M' es *cadena* M' en M. Una de las características numéricas importantes de la cadena M' es su *longitud* l, igual a $|M'| - 1$, donde $|M'|$ es la potencia del portador del subconjunto linealmente ordenado M'. Cada cadena de longitud l es isomorfa a la cadena de los números reales $1, 2, \ldots, l + 1$.

Llámase *altura* $d(m_i)$ del elemento m_i de un conjunto ordenado M el máximo de la longtitud $l_{\text{máx}}$ de las cadenas $m_0 < m_1 < \ldots < m_i$ en M, para los cuales m_i es el elemento máximo (m_0 es el elemento mínimo del conjunto M).

Se llama *longitud* $d(M)$ de un conjunto ordenado M el máximo de longitudes de las cadenas en M. En otras palabras, se llama longitud $d(M)$ de un conjunto ordenado el máximo de alturas $d_i(m_i)$ de sus elementos $d(M) = \max_i d_i(m_i)$, $m_i \in M$.

Se denomina *cota superior mínima* una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior. *La cota inferior máxima* se define de manera análoga. Es obvio, que un subconjunto de un conjunto ordenado no tiene más de una cota superior mínima y una cota inferior máxima.

Otra relación binaria importante es la relación *de equivalencia* ∞. La relación binaria ∞ que posee propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se llama relación *de equivalencia.*

Denominaremos *clase de equivalencia* $K(m_a)$ *del elemento* m_a un conjunto de todos los elementos m_i, cada una de los cuales está en relación de equivalencia con este elemento (conjunto de elementos equivalentes) $K(m_a) = \{m_i / m_i \infty m_a\}$.

Según la propiedad reflexiva de la relación ∞, $m_a \in K(m_a)$. De la propiedad transitiva de la relación de equivalencia $(m_a \infty m_b) \& (m_b \infty m_c) \rightarrow$ $\rightarrow m_a \infty m_c$ se desprende que $K(m_a) \supset K(m_b)$ y de la propiedad simétrica se deduce que $m_a \infty m_b - K(m_a) = K(m_b)$.

Las dos clases de equivalencia diferentes $K(m_x)$ y $K(m_y)$, $m_x \not\infty m_y$, no se intersecan: $K(m_x) \cap K(m_y) = \varnothing$, ya que en caso contrario éstas coincidirían. En efecto, sea que existe un elemento m_z perteneciente a estas clases: $m_z \in K(m_x)$ y $K(m_y)$, pero entonces, debido a las propiedades dadas anteriormente, $K(m_x) = K(m_z) = K(m_y)$. O sea, si existe un elemento m_z perteneciente a dos clases de equivalencia $K(m_x)$ y $K(m_y)$, entonces $K(m_x) = K(m_y)$, lo que se puede escribir como

$$(\exists m_z \in K(m_x),\ K(m_y)) \rightarrow K(m_x) = K(m_y),$$

empleando la designación $\exists$ en lugar de la palabra "existe" ($\exists$ es la primera letra vuelta de la palabra inglesa *Exist,* es decir, existe).

La representación del conjunto M en forma de subconjuntos que no se intersecan dos a dos $\{M_i\}$ la denominaremos *partición* de este conjunto:

$$\bigcup_i M_i = M,\ M_{i_a} \cap M_{i_b} = \varnothing,\ i_a \neq i_b.$$

Por lo tanto, las clases de equivalencia forman una partición del conjunto. En calidad de prueba para reconocer la relación de equivalencia, prefijada por una matriz de adyacencia, puede aparecer la reducción de la matriz de adyacencia a la forma representada en la fig. 1.10. Tal reducción se reali-

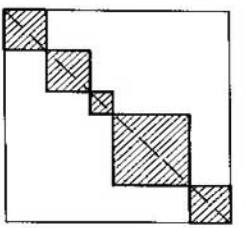


Fig. 1.10

za empleando la permutación de filas (columnas). En la fig. 1.10, se sitúan junto a la diagonal principal las submatrices compuestas de unidades (están rayadas), los otros elementos de la matriz son iguales a cero. Toda submatriz rayada corresponde a una clase de equivalencia.

§ 1.4. Retículo

Al usar la noción del conjunto parcialmente ordenado, definamos el concepto del retículo. Llámase *retículo* un conjunto ordenado $\langle M, \leqslant \rangle$, en el cual cualesquiera dos elementos m_i, m_j tienen cota inferior máxima o *intersección* $m_i \cap m_j$ y cota superior mínima o *unión* $m_i \cup m_j$. Es obvio, que el conjunto ordenado $\overline{M}$, dual al retículo M, es el retículo, en el cual la intersección y la unión cambian de papeles.

Un conjunto ordenado, en el cual cualquier subconjunto tiene cotas inferior máxima y superior mínima se denomina *retículo completo*. Evidentemente, si en retículo todas las cadenas son finitas, cualquier subconjunto en éste tiene cotas superior mínima e inferior máxima.

En calidad de ejercicio hallemos la intersección y la unión de ciertos elementos del retículo determinado por el diagrama de Hasse H (véase la fig. 1.9, *a*):

$$\{y\} \cup \{x\} = \{y, x\}, \qquad 1 \cup \varnothing = 1,$$
$$\{y\} \cap \{a, y\} = \{y\}, \qquad \{y, x\} \cap \{a\} = \varnothing$$
$$\{y, x\} \cap \{a, x\} = \{x\}, \qquad \{y\} \cup \{a, x\} = 1.$$

El retículo puede ser definido también como el álgebra $A = \langle M, \cup, \cap \rangle$, cuya signatura posee las siguientes propiedades:

idempotente

$$m \cup m = m, \quad m \cap m = m; \tag{1.1}$$

conmutativa

$$m_i \cup m_j = m_j \cup m_i, \quad m_i \cap m_j = m_j \cap m_i; \tag{1.2}$$

asociativa

$$(m_i \cup m_j) \cup m_k = m_i \cup (m_j \cup m_k),$$
$$(m_i \cap m_j) \cap m_k = m_i \cap (m_j \cap m_k); \tag{1.3}$$

de absorción

$$m_i \cup (m_i \cap m_j) = m_i, \quad m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i. \tag{1.4}$$

Aquí $\cup$ es la operación de determinar la *cota superior mínima* de elementos (*de unión*); $\cap$ es la operación de determinar la *cota inferior máxima* de elementos (*de intersección*).

Ahora demostremos que las dos definiciones del concepto *retículo* son equivalentes. Supongamos que sea dado un retículo definido por medio de un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, es obvio, que se cumplen las propiedades idempotente y conmutativa. Comprobemos si se cumple la propiedad asociativa, por ejemplo, para la unión $\cup$. Como $\cup$ es una cota

superior mínima, se tiene

$$(m_i \cup m_j) \cup m_k \geqslant m_i \cup m_j \geqslant m_i,$$
$$(m_i \cup m_j) \cup m_k \geqslant m_i \cup m_j \geqslant m_j,$$
$$(m_i \cup m_j) \cup m_k \geqslant m_k.$$

De modo análogo tenemos:

$$(m_i \cup m_j) \cup m_k \geqslant m_j \cup m_k,$$
$$(m_i \cup m_j) \cup m_k \geqslant m_i \cup (m_j \cup m_k),$$
$$m_i \cup (m_j \cup m_k) \geqslant (m_i \cup m_i) \cup m_k.$$

La propiedad asociativa queda demostrada.

Demostremos la validez de la propiedad de absorción:

$$m_i \cup (m_i \cap m_j) \geqslant m_i,$$

ya que el resultado de la unión es la cota superior mínima; $m_i \leqslant m_i$, $m_i \geqslant m_i \cap m_j$ puesto que $m_i \cap m_j$ es la cota inferior máxima. Entonces, $m_i \geqslant m_i \cup (m_i \cap m_j)$, porque $\cup$ es la cota superior mínima. Debido al principio de dualidad, la afirmación es válida también para la intersección.

Ahora, sea que el retículo está definido como álgebra con operaciones $\cap$ y $\cup$ que satisfacen las condiciones (1.1)—(1.4). Señalemos de antemano que si m_i, $m_j \in M$, entonces las igualdades

$$m_i \cap m_j = m_i, \quad m_i \cup m_j = m_j \tag{1.5}$$

pueden o no pueden cumplirse simultáneamente. En efecto, si $m_i \cap m_j = m_i$, debido a las propiedades (1.4) y (1.2) se tiene

$$m_i \cup m_j = (m_i \cap m_j) \cup m_j = m_j;$$

si $m_i \cup m_j = m_j$, según (1.4) $m_i \cap m_j = m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i$

Si para los elementos m_i y m_j tienen lugar las igualdades (1.5), pongamos $m_i \leqslant m_j$. De esta manera, en el conjunto M está introducida la ordenación parcial. En efecto, en virtud de la propiedad (1.1), $m_i \leqslant m_j$.

Luego, si $m_i \leqslant m_j$ y $m_j \leqslant m_k$, o sea $m_i \cap m_j = m_i$, $m_j \cap m_k = m_j$, entonces debido a la propiedad (1.3), $m_i \cap m_k = (m_i \cap m_j) \cap m_k = m_i \cap (m_j \cap m_k) = m_i \cap m_j = m_i$, es decir, $m_i \leqslant m_k$.

En fin, si $m_i \leqslant m_j$ y $m_j \leqslant m_i$, o sea, $m_i \cap m_j = m_i$, $m_j \cap m_i = m_j$, según la propiedad (1.2), $m_i = m_j$.

Demostremos que se cumple la condición de la cota inferior máxima. De la igualdad $(m_i \cap m_j) \cap m_i = m_i \cap (m_i \cap m_j) = (m_i \cap m_i) \cap m_j = m_i \cap m_j$ se deduce que $m_i \cap m_j \leqslant m_i$. De modo análogo tenemos $m_i \cap m_j \leqslant m_j$.

Sin embargo, si en M tomamos un elemento arbitrario m_α que satisface las condiciones $m_\alpha \leqslant m_i$, $m_\alpha \leqslant m_j$, o sea, $m_\alpha \cap m_i = m_\alpha$, $m_\alpha \cap m_j = m_\alpha$, se tiene $m_\alpha \cap (m_i \cap m_j) = (m_\alpha \cap m_i) \cap m_j = m_\alpha \cap m_j = m_\alpha$, de donde $m_\alpha \leqslant m_i \cap m_j$. Por consiguiente, el elemento $m_i \cap m_j$ es la cota inferior máxima.

En virtud del principio de dualidad obtenemos que $m_i \cup m_j$ es la cota superior mínima en el álgebra a examinar.

En calidad de ejercicio calculemos el valor de cierta fórmula F considerando el retículo como el álgebra. Tenemos

$$F(a, b) = ((a \cap (a \cup b)) \cap ((a \cup (a \cap b)) \cap (a \cup b))) \cup 0 \cup a = (a \cap (a \cap (a \cup b))) \cup 0 \cup a = (a \cap a) \cup 0 \cup a = a \cup 0 \cup a = a \cup a = a.$$

Al simplificar $F(a, b)$ habían empleadas las propiedades (1.4), (1.1) y (1.2).

Aquí y a continuación denominaremos *cero* y *unidad estructurales* 0 y 1 en el retículo.

Definamos la propiedad distributiva en un retículo. Se llama *subretículo* A' del retículo A un subconjunto del retículo A que junto con cada par de elementos m_i, m_j de A contiene, también, $m_i \cup m_j$ y $m_i \cap m_j$. Llámase *intervalo* I, determinado por los elementos m_α y m_β en el retículo A, un subretículo A' del retículo A con el elemento máximo m_β y el elemento mínimo m_α:

$$I = [m_\alpha, m_\beta] = \{m_i \in A' / m_\alpha \leqslant m_i \leqslant m_\beta\}.$$

En un retículo A con el cero y la unidad estructurales dos elementos m_α y m_β se denominan *complementarios* si

$$m_\alpha \cap m_\beta = 0, \quad m_\alpha \cup m_\beta = 1.$$

Un elemento $\overline{m}$ complementario a m se denomina también *complemento* del elemento m en el retículo A. Dos elementos que tienen un complemento común en el retículo A se llaman *ligados* en A.

Una clase importante de retículos representa la de retículos distributivos. El retículo A se llama *distributivo*, si satisface las siguientes identidades:

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_j \cap m_k$$

y

$$m_k \cap (m_i \cup m_j) = m_k \cap m_i \cup m_k \cap m_j$$

para todos los m_i, m_j, $m_k \in M$.

Según la propiedad conmutativa de intersección es suficiente cumplir una de estas identidades para definir el retículo distributivo.

Citemos el *criterio de distributividad de un retículo:* el *retículo A es distributivo si, y sólo si, en todo intervalo I del retículo A cualesquiera dos elementos conexos en I son iguales.*

Este criterio se lo puede expresar en una forma más cómoda para cálculos, si se muestra la estructura de subretículos, cuya existencia pone el retículo fuera de la clase de los distributivos.

Introduzcamos el concepto de retículos de Dedekind (modulares). El retículo A se llama *de Dedekind* si, y sólo si, $(m_i \cup m_j) \cap m_k = (m_j \cap m_k) \cup m_i$ para todos los m_i, m_j, $m_k \in A$, tales que $m_j \leqslant m_k$.

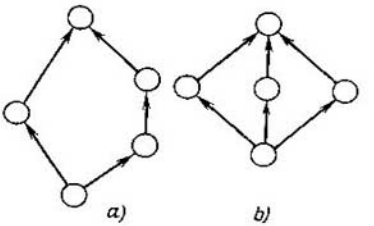


Fig. 1.11 *a)* *b)*

Criterio del carácter de Dedekind de un retículo: el retículo A es de Dedekind si, y sólo si, éste no contiene subretículo isomorfo al retículo A_m (fig. 1.11, *a*).

El retículo A_m contiene un elemento de altura nula, dos de altura unidad, uno de altura 2 y otro de 3.

Al emplear el criterio de modularidad de retículos formulemos el criterio de distributividad en una forma más cómoda para cálculos: *un retículo es distributivo si, y sólo si, no contiene subretículo isomorfo a* A_m, *o sea, es de Dedekind, y no contiene subretículo isomorfo al subretículo* A_8 (fig. 1.11, *b*). El retículo A_8 contiene tres cadenas de longitud 2 compuestas de un elemento de altura nula, tres elementos de altura unidad y de un elemento de altura 2.

El retículo A representado por el diagrama de Hasse H (véase la fig. 1.9, *a*) es de Dedekind y también distributiva.

En un retículo A con el cero y la unidad estructurales, en el cual cada elemento m tiene el complemento $\overline{m}$, puede considerarse dada la operación monaria $f_1(m) = \overline{m}$. El retículo A se denomina *retículo con complementos*, si posee el cero estructural y una operación monaria $f_1(m) = \overline{m}$, tal que

$$\overline{\overline{m}} = m; \tag{1.6}$$

$$\overline{m_i \cup m_j} = \overline{m}_i \cap \overline{m}_j; \tag{1.7}$$

$$m \cap \overline{m} = 0. \tag{1.8}$$

En virtud de (1.6) y (1.7), una de las operaciones $\cup$, $\cap$ puede ser representada por medio de otra. Por consiguiente, el retículo con complementos puede definirse como álgebra, cuya signatura se compone de $\cup$, $^-$.

Señalemos unos corolarios de las identidades (1.6)—(1.8). Tenemos $0 \leqslant m$ para todos los $m \in M$; por consiguiente, $0 \cap m = 0$.

Si hacemos $1 = \overline{0}$ y $0 \cap m = 0$, $0 \cup m = m$ insertamos en (1.7), obtenemos $1 \cap m = m$, $1 \cup m = 1$. Por consiguiente, 1 es el elemento máximo del retículo, o sea, es la unidad estructural.

Según las identidades (1.8) y (1.7).

$$m \cup \overline{m} = 1.$$

Un retículo distributivo con complementos se denomina *álgebra de Boole.*

Se denomina *isomorfismo* η entre las álgebras $A_1 = \langle M_1, S_1 \rangle$ y $A_2 = \langle M_2, S_2 \rangle$ una correspondencia biunívoca entre los elementos de portadores y signaturas, tal que

$$f_i(m_{a_1}, m_{a_2}, \ldots, m_{a_{k-1}}) = m_{a_k} \triangleq \eta(f_i)(\eta(m_{a_1}), \eta(m_{a_2}), \ldots,$$

$$\eta(m_{a_{k-1}})) = \eta(m_{a_k}),$$

$$m_{a_j} \in M_1, \ \eta(m_{a_j}) \in M_2, \ j = 1, 2, \ldots, k, \ f_i \in S_1, \ \eta(f_i) \in S_2.$$

Las álgebras, entre las cuales existe isomorfismo, se llaman *isomorfos.* Todas las leyes del álgebra A_1 son válidas también en el álgebra A_2 isomorfa a la primera.

Teorema 1.2. (teorema de Stone). *El álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Cantor.*

Para las álgebras consideradas tiene lugar el siguiente isomorfismo:

$$a \cup b \leftrightarrow M_a \cup M_b, \ a \cap b \leftrightarrow M_a \cap M_b, \ \bar{a} \leftrightarrow \overline{M_a},$$

donde en los miembros izquierdos de las expresiones figuran las operaciones teórico-reticulares y en los derechos, de la teoría de conjuntos. Estas operaciones tienen la misma denotación. Por eso, para distinguirlas designaremos los argumentos de operaciones teórico-reticulares mediante letras minúsculas y los argumentos de operaciones de la teoría de conjuntos por medio de letras mayúsculas del alfabeto latino.

En la fig. 1.12 se representa un retículo distributivo con complementos, en el cual los resultados de la actuación de las operaciones teórico-reticulares de unión, intersección y complemento se determinan en las tablas (tablas 1.2, *a*, *b*, y *c*).

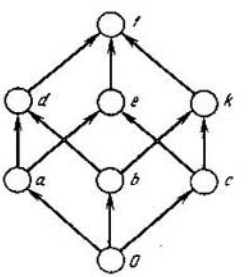


Fig. 1.12

Tabla 1.2, a $\alpha \cup \beta$

α	β							
	0	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*k*	1
0	0	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*k*	1
a	*a*	*a*	*d*	*e*	*d*	*e*	1	1
b	*b*	*d*	*b*	*k*	*d*	1	*k*	1
c	*c*	*e*	*k*	*c*	1	*e*	*k*	1
d	*d*	*d*	*d*	1	*d*	1	1	1
e	*e*	*e*	1	*e*	1	*e*	1	1
k	*k*	1	*k*	*k*	1	1	*k*	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 1.2, b $\alpha \cap \beta$

α	β							
	0	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*k*	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	*a*	0	0	*a*	*a*	0	*a*
b	0	0	*b*	0	*b*	0	*b*	*b*
c	0	0	0	*c*	0	*c*	*c*	*c*
d	0	*a*	*b*	0	*d*	*a*	*b*	*d*
e	0	*a*	0	*c*	*a*	*e*	*c*	*e*
k	0	0	*b*	*c*	*b*	*c*	*k*	*k*
1	0	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*k*	1

Tabla 1.2, c

α	$\bar{\alpha}$	Comentarios
0	1	$0 \cup 1 = 1,\ 0 \cap 1 = 0$
a	k	$a \cup k = 1,\ a \cap k = 0$
b	e	$b \cup e = 1,\ b \cap e = 0$
c	d	$c \cup d = 1,\ c \cap d = 0$
e	b	$e \cup b = 1,\ e \cap b = 0$
k	a	$k \cup a = 1,\ k \cap a = 0$
1	0	$1 \cup 0 = 1,\ 1 \cap 0 = 0$

A los elementos α y $\bar{\alpha}$ les corresponden los vértices del diagrama H que distan maximalmente (en el sentido de la longitud de la cadena que une estos elementos).

§ 1.5. Modelo. Álgebra de relaciones

Definamos la *relación n-aria* análogamente a la relación binaria.

Un producto cartesiano de n conjuntos M, iguales entre sí, se denomina *n-ésima potencia M^n del conjunto M*. Por *relación n-aria T* en el conjunto M se comprende un subconjunto T de su n-ésima potencia $T \subset M^n$. Si elementos $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n} \in M$, $(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}) \in T$, se dice que los elementos $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}$ están en la relación T. Cualquiera relación n-aria puede ser prefijada en la forma de una *lista*, cuyos elementos son las sucesiones (*cortejos*) determinadas por esta relación.

Consideremos la propiedad *simétrica* de relaciones n-arias que permiten emplear aficazmente relaciones n-arias para la formalización de muchos problemas prácticos. Se llama *simétrica* tal relación n-aria T en el conjunto M tal, que si $(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}) \in T$, entonces cualesquiera sucesión $(m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots, m_{j_n})$ obtenida de $(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n})$ permutando los elementos está también en la relación T: $(m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots, m_{j_n}) \in T$.

En esencia, una relación n-aria que posee la propiedad simétrica prefija los subconjuntos compuestos de n elementos, es decir, subconjuntos de potencia n. A continuación, una relación n-aria que tiene la propiedad simétrica la denominaremos *relación S-rica (S-relación)* y, si se trata de una S-relación, simplemente relación S o relación verbal. Los elementos de un conjunto M, en el cual está determinada una S-relación, los llamaremos letras y los subconjuntos determinados, por la S-relación, los denominaremos palabras y los designaremos con la letra griega μ_i con el índice inferior.

Se puede prefijar S-relación en formas más cómodas: mediante la matriz de incidencia y el grafo modelo (mografo).

Llámase *matriz de incidencia* $Q = [q_{ij}]$ una matriz de dos dimensiones, a cada columna de la cual le corresponde biunívocamente una letra, a cada

fila, una palabra determinada por la S-relación y

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ para } m_j \in \mu_i \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la 3-relación en el conjunto $M = \{a, b, c, j, m, o\}$ que determina las palabras $\mu_1 = \{a, j, o\}$, $\mu_2 = \{a, m, o\}$, $\mu_3 = \{o, c, a\}$, $\mu_4 = \{b, o, j\}$ puede ser prefijada, empleando la matriz de incidencia Q, del modo siguiente:

$$Q = \begin{array}{|cccccc|} a & b & c & j & m & o \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Si la relación S determina el subconjunto $M' \subset M^S$, llamaremos *potencia* de la relación S el número s.

No se puede prefijar la S-relación de potencia arbitraria empleando un grafo, cuyo portador coincide con el conjunto de letras (véase el teorema 1.3).

Diremos que un *arco u es incidente* a un vértice v, si v es su origen o su extremo. Llámase *subgrafo G' de un grafo G* el grafo G' obtenido del grafo G después de eliminar unos vértices y sus arcos incidentes. Un grafo se llama *completo*, si todos sus vértices son adyacentes dos a dos.

Teorema 1.3. *Si por lo menos tres palabras distintas determinadas por una relación S corresponden a un subgrafo completo de un grafo G el grafo G no prefija la relación S.*

□ Al prefijar una relación verbal por un grafo asociaremos la palabra determinada con un subgrafo completo del grafo G. Entonces, el teorema queda obvio. En efecto, es suficiente considerar el siguiente ejemplo. Sea que una 3-relación en el conjunto $M = \{a, s, o, l\}$ determina las palabras $\mu_1 = \{s, o, l\}$, $\mu_2 = \{l, o, a\}$, $\mu_3 = \{a, s, o\}$, a las cuales corresponde el grafo G representado en la fig. 1.13, *a*. Esto es un grafo completo de cuatro vértices. Éste puede prefijar la palabra $\{a, s, o, l\}$ o las palabras $\{s, o, l\}$, $\{l, o, a\}$, $\{a, o, s\}$ o las palabras $\{s, o\}$, $\{l, o\}$, $\{s, l\}$, $\{a, l\}$, $\{s, a\}$, $\{a, o\}$, es decir, tiene lugar la multiformidad. ■

Para prefijar unívocamente las relaciones verbales, es necesario poner en correspondencia a cada letra (vértice) un conjunto de identificadores de las palabras que contienen esa letra. Entonces, a cualquiera palabra le corresponde biunívocamente un subgrafo completo, a cada vértice del cual corresponde el identificador de esta misma palabra. Tal subgrafo completo, correspondiente a la palabra, lo denominaremos a continuación *de elemento*. El proceso de poner en correspondencia a cada letra un conjunto de identificadores de las palabras que contienen esa letra, lo llamaremos *modelización del grafo G*. Como resultado de modelización del grafo G, a

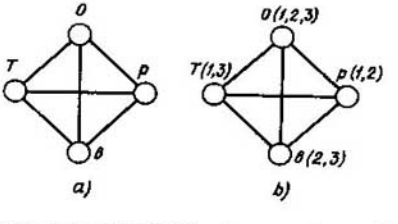


Fig. 1.13

cada vértice corresponde biunívocamente una letra ponderada por un conjunto de identificadores de las palabras que la contienen, con ello, dos vértices son *adyacentes* (se unen mediante una línea no orientada es decir, la *arista*), si les corresponde por lo menos un identificador común. Una función obtenida por este modo en el grafo, cuyo campo de definición son los vértices del grafo y cuyo campo de valores son los conjuntos de identificadores de las palabras, la denominaremos *grafo modelo (mografo)* y la denotaremos con $G^M = \langle (V, W), U \rangle$. Aquí W es el conjunto de identificadores de palabras.

Los mografos G_1^M y G_2^M que prefijan, respectivamente, las relaciones $S_1 = \{\{s, o, l\}, \{l, o, a\}, \{a, o, s\}\}$ en el conjunto $M_1 = \{a, s, o, l\}$ y $S_2 = \{\underbrace{\{a, j, o\}}_{1}, \underbrace{\{a, m, o\}}_{2}, \underbrace{\{o, c, a\}}_{3}, \underbrace{\{b, o, j\}}_{4}\}$ en el conjunto $M_2 = \{a, b, c, j, m, o\}$ se ofrecen en las figs. 1.13, *b* y 1.14, *a*.

Para prefijar S-relaciones se utiliza también el término *hipergrafo*. Cuando lo representan geométricamente, sus letras se ponen en correspondencia biunívoca a los vértices y sus palabras, a los círculos de Euler que abarcan las letras que integran la palabra correspondiente.

La interpretación geométrica del hipergrafo que determina la colección $\langle M, S_3 \rangle$, $M = \{a, b, c, j, m, o\}$,

$S_3 = \{\{a, j, o\}, \{a, m, o\}, \{o, c, a\}, \{b, o, j\}\}$

está representada en la fig. 1.14 b.

Empleando un grafo se puede prefijar unívocamente una S-relación, si en calidad de portador del grafo tomamos tanto el conjunto de letras, como el conjunto de identificadores de palabras. Tal representación de S-relación se realiza por medio de un grafo *de dos partes*.

Un grafo $G = \langle V, U \rangle$ se denomina de *dos partes*, si su portador está partido en dos subconjuntos V^+, V^- que no tienen vértices comunes y el origen de cada arco $u \in U$ pertenece al subconjunto V^+, y sólo a él, mientras que su extremo pertenece al subconjunto V^-, y sólo a él. Al prefijar S-relaciones a los elementos del subconjunto V^+ en un grafo de dos partes $G = \langle V, U \rangle$ se les ponen en correspondencia binívoca las letras, a

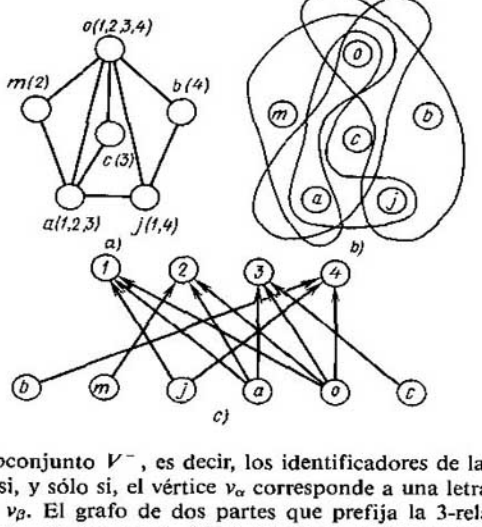


Fig. 1.14

los elementos del subconjunto V^-, es decir, los identificadores de las palabras y $(v_\alpha, v_\beta) \in U$ si, y sólo si, el vértice v_α corresponde a una letra que figura en la palabra v_β. El grafo de dos partes que prefija la 3-relación $S_\beta = \{\underbrace{\{a, j, o\}}_{1}, \underbrace{\{a, m, o\}}_{2}, \underbrace{\{o, c, a\}}_{3}, \underbrace{\{b, o, j\}}_{4}\}$ en el conjunto $\{a, b, c, j, m, o\}$ está representado en la fig. 1.14 c.

Uno de los principales conceptos de la matemática discreta es el concepto de modelo. Llámase *modelo* Ψ una colección del conjunto M con las relaciones prefijadas en él.

$$S = \{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1n_1}, R_{21}, R_{22}, \ldots, R_{2n_2}, \ldots, R_{m1}, R_{m2}, \ldots, \ldots, R_{mn_m}\},$$

donde el conjunto M es el *portador del modelo* y las relaciones prefijadas R_{ia}, $R_{ia} \in M^i$ forman la *signatura del modelo* $\Psi = \langle M, S \rangle$.

La potencia del portador determina el *tipo-ario de la relación*. Dos relaciones R_α y R_β con la misma potencia se llaman *compatibles según la unión* o simplemente *compatibles*.

Está claro que la operación n-ádica $f_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m_{n+1}$ puede ser examinada como una relación $(n + 1)$-aria R_{n+1}.

Denominaremos, según A. I. Máltsev, *sistema algebraico* una colección del conjunto M con las operaciones y relaciones prefijadas en él.

Un caso particular del sistema algebraico es *álgebra de relaciones* y su extensión, álgebra relacional.

Examinemos el álgebra de relaciones, cuyo portador es un conjunto de relaciones y la signatura son las operaciones de unión, intersección, diferencia y del producto cartesiano extenso de relaciones.

La *unión* $R_\alpha \cup R_\beta$ *de dos relaciones compatibles* R_α y R_β es el conjunto de todos los cortejos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a una de estas relaciones. La unión de las relaciones

$$R_\alpha = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e)\} \text{ y}$$

$$R_\beta = \{(a, b, d), (b, d, e), (c, d, e)\} \text{ es}$$

$$R_\alpha \cup R_\beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e), (b, d, e), (c, d, e)\}.$$

Las relaciones consideradas son compatibles, ya que sus potencias son iguales: $s(R_\alpha) = s(R_b) = 3$, $R_\alpha, R_b \subset M^3$, $M = \{a, b, c, d, e\}$.

La *intersección* $R_\alpha \cap R_\beta$ *de dos relaciones compatibles* R_α y R_β es el conjunto de todos los cortejos pertenecientes tanto a la relación R_α, como a la relación R_β. La intersección de las relaciones R_α y R_β es

$$R_\alpha \cap R_\beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e)\} \cap \{(a, b, d),$$

$$(b, d, e), (c, d, e)\} = \{(a, b, d)\}.$$

La diferencia $R_\alpha \setminus R_\beta$ *de dos relaciones compatibles* R_α y R_β es el conjunto de todos los cortejos pertenecientes a la relación R_α y no pertenecientes a la R_β. Así, por ejemplo, $R_\alpha \setminus R_\beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e)\} \setminus \{(a, b, d), (b, d, e), (c, d, e)\} = \{(a, b, c), (b, c, e)\}$.

El producto cartesiano extenso $R_\alpha \times R_\beta$ *de dos relaciones* R_α y R_β es el conjunto de todos los cortejos π tales que π es concatenación del cortejo $a \in R_\alpha$ y del cortejo $b \in R_\beta$(*concatenación* de cortejos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ es el cortejo $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)$). Por ejemplo, para las relaciones examinadas R_α y R_β el producto cartesiano extenso es

$$R_\alpha \times R_\beta = \{(a, b), (c, d), (a, e)\} \times \{(a, b, c),$$

$$(b, d, e)\} = \{(a, b, a, b, c), (a, b, b, d, e), (c, d, a, b, c),$$

$$(c, d, b, d, e), (a, e, a, b, c), (a, e, b, d, e)\}.$$

Los conceptos del modelo y del álgebra de relaciones tienen amplio empleo para formalizar los objetos reales. Consideremos cómo se utiliza el álgebra de relaciones para elaborar el apoyo de información, es decir, una base relacional de datos.

La construcción de una base relacional de datos se asienta en una tabla bidimensional, cada columna de la cual corresponde a un dominio (o a un atributo correspondiente a una parte del dominio) y cada fila, a un cortejo de atributos que están en la relación R.

Consideremos una relación 5-aria R_5 (exámenes) (tabla 1.3).

Tabla 1.3

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210
2	K5-02	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV	03 ENERO	AULA 211
3	K5-03	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	03 ENERO	AULA 211
4	K5-04	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	05 ENERO	AULA 210
5	K5-01	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	09 ENERO	AULA 210
6	K5-02	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
7	K5-03	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	10 ENERO	AULA 211
8	K5-04	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

La tabla 1.3 determina una relación de un modelo relacional de datos. La relación R_5 es un subconjunto del producto cartesiano $D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \times D_5$, cuyo factor es el dominio D_i. Los elementos del dominio D_i representan valores de atributos. El dominio D_1 (grupo) contiene valores K5-01, K5-02, K5-03 y K5-04:

D_1 = {K5-01, K5-02, K5-03, K5-04};

de modo análogo tenemos dominios:

D_2 (asignatura):
D_2 = {TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS, LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA, FÍSICA, LENGUAJES ALGORÍTMICOS};
D_3 (examinador);
D_3 = {PROF. IVANOV, PROF. PETROV, PROF. SÍDOROV};
D_4 (fecha):
D_4 = {ENERO 03, ENERO 05, ENERO 09, ENERO 10};
D_5 (aula):
D_5 = {AULA 210, AULA 211}.

El orden de las columnas está fijado, las filas, en el caso común, se sitúan arbitrariamente. Las cifras de la primera columna 1, 2, . . ., 8 identifican los elementos de la relación R_5.

Definamos *álgebra relacional* para transformar relaciones. El portador del álgebra relacional es un conjunto de relaciones. La signatura, excepto las operaciones introducidas (la unión, la intersección, la diferencia y el producto cartesiano extenso de relaciones) incluye operaciones especiales en las relaciones: elección, proyección y agrupación.

La operación de *elección* es un procedimiento de la construcción de un subconjunto "horizontal" de una relación, o sea, un subconjunto de cortejos que poseen una propiedad planteada.

Ejemplo 1.3. Empleando la operación de elección construir una relación R_5' (el horario de exámenes del Prof. Ivanov). El resultado de la operación de elección son las filas, en las cuales el dominio D_3 se representa por el valor Prof. Ivanov; son las filas 1, 6 y 8 (tabla 1.4).

Tabla 1.4

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210
6	K5-02	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
8	K5-04	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

Para definir proyecciones de las relaciones en el álgebra relacional el conjunto se parte en dos subconjuntos en el caso de la relación binaria y en n subconjuntos en el caso de la relación n-aria:

$$R_2 \subset M^2,\ M = A \cup B,\ A \cap B = \varnothing,\ R_2 \subset A \times B;$$

$$R_n \subset M^n,\ M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i;\ A_{i_a} \cap A_{i_b} = \varnothing,$$

$$i_a,\ i_b (i_a \neq i_b) \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\},\ R_n \subset A_1 \times A_2 \times , \ldots , \times A_n.$$

Llámase *proyección* $\Pr(R_2/A)$ *de una relación binaria* R_2, $R_2 \subset A \times B$ sobre A un conjunto de elementos $\{a_i/(a_i, b_i) \in R_2\}$.

Llámase *proyección* $\Pr(R_n/A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m})$ *de una relación n-aria* $R_n \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, $n \geqslant m$, sobre $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ un conjunto de cortejos $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$, donde $a_{i_1} \in A_{i_1}$, $a_{i_2} \in A_{i_2}$, $\ldots, a_{i_m} \in A_{i_m}$, cada uno de los cuales es una parte de un elemento de la relación n-aria R_n.

La operación de proyección determina la construcción de un subconjunto "vertical" de una relación, es decir, de un conjunto de un subconjunto de cortejos que se obtiene eligiendo unos y excluyendo otros dominios.

Ejemplo 1.4. Una proyección $\Pr(R_5/D_2, D_3)$ engendra un conjunto de pares, cada uno de los cuales determina la asignatura y al examinador (tabla 1.5).

Tabla 1.5.

R_2	D_2	D_3
	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV
	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV
	FÍSICA	PROF. SÍDOROV
	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV
	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV

En la tabla 1.5, las filas iguales se unen en una sola.

La *operación de agrupación* de dos tablas que tienen un dominio común permite construir una tabla, cada fila de la cual se forma uniendo dos filas de las tablas de partida. En las tablas prefijadas se toman las filas de un mismo valor que integran un dominio común; una columna se pone en correspondencia al dominio común.

Ejemplo 1.5. Por dos tablas prefijadas (tablas 1.6, *a* y 1.6, *b*) hallemos el resultado de la operación de agrupación según el dominio D_1 (tabla 1.6, *c*).

Tabla 1.6, a

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210
	K5-02	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV	03 ENERO	AULA 211
	K5-03	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	05 ENERO	AULA 211
	K5-04	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	05 ENERO	AULA 210

Tabla 1.6, b

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	K5-01	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	09 ENERO	AULA 210
	K5-04	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

Tabla 1.6, a

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	K5-02	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
	K5-03	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	10 ENERO	AULA 211

Tabla 1.6, c

R_9	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_2'	D_3'	D_4'	D_5'
	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	09 ENERO	AULA 210
	K5-02	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV	03 ENERO	AULA 211	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROV. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
	K5-03	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	05 ENERO	AULA 211	LENGUAJES ALGO-RÍTMICOS	PROF. PETROV	10 ENERO	AULA 211
	K5-04	LENGUAJES ALGO-RÍTMICOS	PROF. PETROV	05 ENERO	AULA 210	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

De manera análoga, como por la condición de "igualdad", se puede definir la operación de agrupación por otras condiciones de comparación: $>$, $\geqslant$, $\neq$, $<$, $\leqslant$. Por ejemplo, definamos la operación de agrupación por la condición "mayor que" ($>$).

Se llama *agrupación por la condición "mayor que" de la relación R_a respecto al atributo X y de la relación R_b según el atributo Y* (los atributos X y Y son de un mismo dominio común para las relaciones R_a y R_b), $X > Y$, un conjunto de todos los cortejos π_i tales que π_i es la concatenación del cortejo a_i perteneciente a R_a y del cortejo b_i perteneciente a R_b, donde X es una parte de a_i, mientras que Y es una parte de b_i y $X > Y$.

En una base de datos, un pedido será cumplido tanto más rápido cuanto menos operaciones sobre relaciones contiene. De este modo, es de interés práctico un problema que se examina a continuación de simplificación de expresión de un conjunto por medio de operaciones introducidas.

§ 1.6. AXIOMÁTICA DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS. MINIMIZACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN DE LOS CONJUNTOS

Al emplear el enfoque axiomático construiremos formalmente una teoría de conjuntos a base de los siguientes axiomas.

Axioma de existencia. *Existe por lo menos un conjunto.*

Axioma de voluminosidad (de extensionalidad). *Si los conjuntos M_a y M_b se componen de los mismos elementos, ellos coinciden (son iguales):* $M_a = M_b$.

Axioma de unión. *Para los conjuntos arbitrarios M_a y M_b existe un conjunto, cuyos elementos son todos los elementos del conjunto M_a y todos los elementos del conjunto M_b y que no contiene ningún otro elemento.*

De los axiomas de voluminosidad y de unión se deduce que para los conjuntos arbitrarios M_a y M_b el conjunto que satisface las condiciones del axioma de unión es único. En efecto, si existieran tales dos conjuntos M_{c_1} y M_{c_2}, contendrían los mismos elementos (todos los elementos pertenecientes al conjunto M_a y todos los elementos del conjunto M_b). Por esta razón, en virtud del axioma de voluminosidad, $M_{c_1} = M_{c_2} = M_c$. Este único conjunto M_c se llamará *unión* de los conjuntos M_a y M_b y se denotará $M_c = M_a \cup M_b$.

Axioma de diferencia. *Para los conjuntos arbitrarios M_a y M_b existe un conjunto, cuyos elementos son aquellos, y sólo aquellos, elementos del conjunto M_a que no son elementos del conjunto M_b.*

De modo análogo, de la segunda y la cuarta axioma deducimos que para los conjuntos arbitrarios M_a y M_b existe exactamente un conjunto que contiene elementos del conjunto M_a no pertenecientes al conjunto M_b. Este conjunto M_c se denominará *diferencia* de los conjuntos M_a y M_b: $M_c = M_a \setminus M_b$.

Axioma de potencia. *Para cada conjunto M existe una familia de conjuntos B(M) (booleano), cuyos elementos son todos los subconjuntos M_i, $M_i \subset M$, y sólo éstos.*

Axioma de existencia del conjunto vacío. *Existe tal conjunto $\varnothing$ que ningún elemento le pertenece.*

Si las operaciones y los conceptos de la teoría de los conjuntos fueron introducidos intuitivamente, el enfoque axiomático permite definir formalmente estos conceptos y operaciones de la teoría de los conjuntos basándose en los seis axiomas introducidos.

Con auyda de las operaciones de unión y de diferencia, empleando los axiomas introducidos, definamos otras tres operaciones sobre los conjuntos.

La intersección de los conjuntos M_a y M_b se determina mediante la

fórmula

$$M_a \cap M_b = M_a \setminus (M_a \setminus M_b).$$

Se puede mostrar que los elementos de intersección $M_a \cap M_b$ son aquellos, y sólo aquellos, que pertenecen al conjunto M_a y también al conjunto M_b.

El complemento $\overline{M}$ del conjunto M se define por la fórmula

$$\overline{M} = 1 \setminus M.$$

La diferencia simétrica de los conjuntos M_a y M_b se determina por medio de la fórmula

$$M_a \setminus\cdot M_b = (M_a \setminus M_b) \cup (M_b \setminus M_a).$$

A base de la axiomática introducida puede ser demostrada la validez de las leyes aducidas anteriormente que determinan las propiedades de la signatura del álgebra de los conjuntos (las leyes idempotente, conmutativa, asociativa, distributiva, de operación con constantes, de complemento doble y las leyes propuestas por De Morgan) y también de las siguientes leyes:

ley distributiva de intersección respecto a la diferencia

$$M_a \cap (M_b \setminus M_c) = M_a \cap M_b \setminus M_a \cap M_c;$$

ley conmutativa de diferencia simétrica

$$M_a \setminus\cdot M_b = M_b \setminus\cdot M_a;$$

ley asociativa de la diferencia simétrica

$$M_a \setminus\cdot (M_b \setminus\cdot M_c) = (M_a \setminus\cdot M_b) \setminus\cdot M_c;$$

ley distributiva de intersección respecto a la diferencia simétrica

$$M_a \cap (M_b \setminus\cdot M_c) = M_a \cap M_b \setminus\cdot M_a \cap M_c;$$

leyes de encolamiento

$$M_a \cap M_b \cup M_a \cap \overline{M}_b = M_a,\ (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup \overline{M}_b) = M_a;$$

leyes de absorción

$$M_a \cup M_a \cap M_b = M_a,\ M_a \cap (M_a \cup M_b) = M_a;$$

leyes de Poretski

$$M_a \cup \overline{M}_a \cap M_b = M_a \cup M_b,$$
$$M_a \cap (\overline{M}_a \cup M_b) = M_a \cap M_b.$$

Empleando estas leyes examinemos el problema de minimización de la representación del conjunto M mediante las operaciones $\cup$, $\cap$, $^-$.

Como *complejidad de la representación del conjunto* M comprenderemos el número de símbolos M_i, $\overline{M}_i$ en la expresión que lo prefija.

Sea que en el espacio $\mathbf{1} = \{M_1, M_2, M_3\}$ se prefija un conjunto de la forma

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_3.$$

A base de las leyes idempotente, conmutativa y asociativa de unión, obtenemos

$$M(M_1, M_2, M_3) = (\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_3).$$

Al usar las leyes conmutativas de intersección y de encolamiento, tenemos $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2$.

Según las leyes conmutativas de unión y intersección y la ley de encolamiento obtenemos $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3 \cup \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2$. En virtud de las leyes conmutativas de intersección y absorción tenemos $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2$. La complejidad de la representación del conjunto prefijado disminuyó de 21 a 5.

Denominaremos *estrategia de transformaciones* la sucesión de aplicación de las leyes. La complejidad de la representación de un conjunto que se obtiene aplicando estas leyes (cada una de las cuales determina una transformación equivalente) depende de la estrategia utilizada. Hallemos una estrategia que engendra siempre la expresión minimal de un conjunto prefijado.

Consideremos una álgebra $A = \langle \mathbf{B}(\mathbf{1}), \cup, \cap, {}^- \rangle$ y determinemos los conjuntos que pueden engendrarse (formarse) de conjuntos arbitrarios $M_1, M_2, \ldots, M_n$ llamados *generatrices* del espacio $\mathbf{1}$ empleando las operaciones $\cup, \cap, {}^-$.

A continuación un conjunto

$$M_i^{\sigma_i} = \begin{cases} M_i & \text{para } \sigma_i = 1, \\ \overline{M}_i & \text{para } \sigma_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

lo denominaremos *terma primaria.* Un conjunto de tipo

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i^{\sigma_i} = M_1^{\sigma_1} \cap M_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap M_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_i = 0, 1.$$

lo llamaremos *constituyente.*

El número común de distintas constituyentes no supera 2^n. A cada constituyente se le puede poner en correspondencia un juego binario de longitud n, el número de estos juegos equivale a 2^n. Si unas constituyentes son iguales a $\varnothing$, el número común de constituyentes es menor que 2^n, con ello, entre los conjuntos existen al menos dos tales que pueden expresarse uno por medio del otro, es decir, dependientes. Por ejemplo, si $n = 2$ y $M_2 = \overline{M}_1$, existen sólo dos constituyentes distintas de $\varnothing$

$$\varnothing = M_1^0 \cap M_2^0 = M_1^1 \cap M_2^1,$$
$$C_1 = M_1^0 \cap M_2^1, \; C_2 = M_1^1 \cap M_2^0.$$

Lema 1.1. *La intersección de dos constituyentes distintas es vacía.*

□ En efecto, si las constituyentes $C_a = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{\sigma_i}$ y $C_b = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{\sigma_i^*}$ son diversas, entonces $\sigma_k \neq \sigma_k^*$ por lo menos, para un k, $k \leqslant n$. Pero, entonces, $M_k^{\sigma_k} \cap M_k^{\sigma_k^*} = \varnothing$ y, por consiguiente, $C_a \cap C_b = \varnothing$. ■

Lema 1.2. *La unión de todas las constituyentes equivale a* **1**.

□ Representemos 1 en la forma

$$1 = \bigcap_{i=1}^{n} (M_i^0 \cup M_i^1)$$

y, abriendo el paréntesis, obtenemos la unión de todas las constituyentes en el segundo miembro de la igualdad. ■

Lema 1.3. *El conjunto M_i equivale a la unión de las constituyentes, cada una de las cuales contiene M_i^1.*

□ Según el lema 1.2,

$$1 = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_l = \bigcup_{i=1}^{l} C_i,$$

donde C_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, es una constituyente. Determinemos la intersección de los miembros primero y segundo de esta expresión con M_i. Tenemos

$$M_i = (M_i \cap C_1) \cup (M_i \cap C_2) \cup \ldots \cup (M_i \cap C_l).$$

Si C_j contiene M_i^0 en calidad de argumento de intersección, se tiene $M_i \cap C_j = \varnothing$. Pero, si C_j contiene M_i^1, se tiene $C_j \cap M_i = C_j$. Por consiguiente, M_i es la unión de aquellas constituyentes que contienen M_i^1 en calidad de factor. ■

Teorema 1.4. *Cada conjunto no vacío formado de los conjuntos M_1, $M_2, \ldots, M_n$ empleando las operaciones $\cup$, $\cap$, $^-$ es la unión de cierto número de constituyentes.*

□ En virtud del lema 1.3, el teorema es válido para los conjuntos M_1, $M_2, \ldots, M_n$. Por consiguiente, es suficiente demostrar que si conjuntos arbitrarios M_a y M_b pueden representarse en forma de la unión de cierto número de constituyentes, los conjuntos $M_a \cup M_b$, $M_a \cap M_b$ y $\overline{M}$, si no son vacíos, pueden también representarse en forma de unión de las constituyentes.

Sea que los conjuntos M_a y M_b son representables en forma de la unión de constituyentes $M_a = C_{a_1} \cup C_{a_2} \cup \ldots \cup C_{a_k}$ y $M_b = C_{b_1} \cup C_{b_2} \cup \ldots \cup C_{b_r}$. Entonces el conjunto $M_a \cup M_b$ puede representarse evidentemente en forma de unión de las constituyentes.

Según la ley de distributividad, $M_a \cap M_b = (C_{a_1} \cap C_{b_1}) \cup \ldots \cup (C_{a_k} \cap C_{b_r})$. Además, si $C_{a_\alpha} \neq C_{b_\beta}$, de acuerdo con el lema 1.1, $C_{a_\alpha} \cap C_{b_\beta} = \varnothing$, en caso contrario, $C_{a_\alpha} \neq C_{b_\beta}$. Por consiguiente, la intersección $M_a \cap M_b$ o bien es vacía, o bien es representable en forma de unión de las cons-

tituyentes. Demostremos que el conjunto $\overline{M}$ es también representable en forma de unión de las constituyentes, si $M = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$.

Debido a la ley correspondiente a De Morgan,

$$\overline{M} = \overline{C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k} = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \ldots \cap \overline{C_k} = \overline{M_1^{\sigma_{11}} \cap M_2^{\sigma_{12}} \cap \ldots}$$

$$\ldots \cap \overline{M_n^{\sigma_{1n}} \cap M_1^{\sigma_{21}} \cap M_2^{\sigma_{22}} \cap \ldots \cap M_n^{\sigma_{2n}} \cap \ldots \cap M_1^{\sigma_{k1}} \cap M_2^{\sigma_{k2}} \cap \ldots}$$

$$\ldots \cap \overline{M_n^{\sigma_{kn}}} = (\overline{M_1^{\sigma_{11}}} \cup \overline{M_2^{\sigma_{12}}} \cup \ldots \cup \overline{M_n^{\sigma_{1n}}}) \cap (\overline{M_n^{\sigma_{21}}} \cup \overline{M_2^{\sigma_{22}}} \cup \ldots$$

$$\ldots \cup \overline{M_n^{\sigma_{2n}}}) \cap \ldots \cap (\overline{M_1^{\sigma_{k1}}} \cup \overline{M_2^{\sigma_{k2}}} \cup \ldots \cup \overline{M_n^{\sigma_{kn}}}).$$

Abriendo el paréntesis y empleando las relaciones $M_\alpha \cap \overline{M}_\alpha = \varnothing$, $M_\alpha \cup \overline{M}_\alpha = \mathbf{1}$ y también añadiendo el factor $M_\beta \cup \overline{M}_\beta$ a las intersecciones que no tienen índice inferior β, llegamos a que el conjunto $\overline{M}$ es también representable en forma de unión de las constituyentes. ■

Teorema 1.5. *De n conjuntos en el álgebra* $A = \langle B(\mathbf{1}), \cup, \cap, {}^- \rangle$ *se puede formar no más de* 2^{2^n} *conjuntos.*

□ Debido al teorema 1.4, cada conjunto M es la unión de constituyentes, el número de las cuales no supera 2^n; por consiguiente, el número de distintas uniones no supera 2^{2^n}. Además, si los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son independientes, es decir, todas las constituyentes se distinguen del conjunto vacío, el número de constituyentes diversas es igual a 2^n y el número de conjuntos formados por éstas en forma de su unión es igual a 2^{2^n} (teniendo en cuenta el conjunto vacío). ■

La introducción del concepto de la constituyente permite prefijar un conjunto M, para los conjuntos independientes fijados $M_1, M_2, \ldots, M_n$ del conjunto universal $\mathbf{1}$, en forma de unión de las constituyentes:

$$M = \bigcap_j \bigcup_{i=1}^{n} M_i^{\sigma_i}.$$

Cada conjunto fijado $M_i \subset \mathbf{1}$ divide el espacio en dos partes: propiamente M_i y $\overline{M}_i$. Para los conjuntos independientes $M_i \in \{M_i / i = 1, \ldots, n\}$ el espacio se parte en $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ veces}} = 2^n$ regiones. Cada región es la intersección de n conjuntos M_i o $\overline{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ponemos en correspondencia a esta región un vector binario $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, en el cual $\sigma_i = 1$, si la intersección $C = \bigcap_i M_i^{\sigma_i}$ contiene M_i y $\sigma_i = 0$, si contiene $\overline{M}_i$ y también el equivalente decimal

$$d(C) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{i-1}.$$

Cualquier conjunto M en el espacio $\mathbf{1}$ puede representarse en forma de unión de estas regiones. Al conjunto M le pongamos en correspondencia

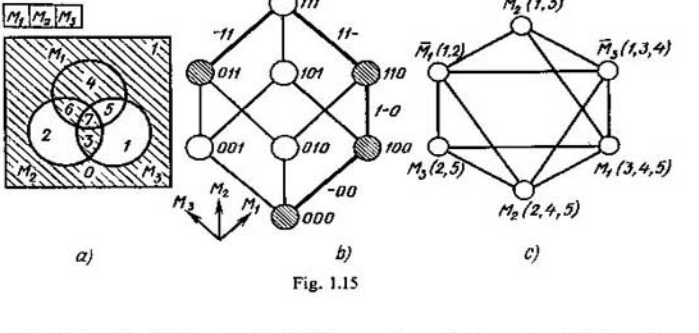


Fig. 1.15

un vector binario de la longitud 2^n, en el cual al orden i-ésimo le corresponde una región con el equivalente decimal, igual a i. Representemos el vector que determina el conjunto en forma de equivalente decimal:

$$d(M) = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i 2^i, \; c_i = 0, \; 1.$$

Por consiguiente, el conjunto M en el espacio puede prefijarse en forma de equivalente decimal correspondiente.

En el espacio tridimensional $1 = \{M_1, M_2, M_3\}$, consideremos, por ejemplo, un conjunto $M(M_1, M_2, M_3)$ con el equivalente decimal $d(M) = 217$. Tenemos $217 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Al conjunto M le corresponde un vector binario (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) que determina la inclusión de regiones en el conjunto M (fig. 1.15, *a*).

Además del diagrama de Euler, el espacio puede ser prefijado en forma de hipercubo o cubo n-dimensional (n-dimensión del espacio, igual al número de conjuntos fijados).

Se llama *hipercubo (cubo n-dimensional)* un grafo H, cada vértice del cual corresponde biunívocamente a una región del espacio y dos vértices se unen por una arista, si corresponden a regiones colindantes (que tienen la frontera común). Los vectores binarios puestos en correspondencia a estas regiones se distinguen en un, y sólo en un, orden.

El hipercubo para el ejemplo considerado se representa en la fig. 1.15, *b* (los vértices correspondientes a las constituyentes del conjunto M están rayadas).

Frecuentemente un conjunto M se prefija en forma de una tabla binaria, a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente una constituyente. El conjunto de filas de la tabla está ordenado linealmente según el crecimiento del equivalente decimal de un juego binario correspondiente. Los conjuntos que forman el espacio corresponden a las columnas. La última columna se pone en correspondencia al conjunto M y la unidad indica que la constituyente correspondiente entra en el conjunto M. En el caso dado tenemos la tabla 1.7.

Analíticamente el conjunto M se prefija en forma

$$M = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cup \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup$$
$$\cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

o en forma de mografo

$$G^M = \langle V, S_3 \rangle,$$

$$V = \{M_i, \overline{M}_i / i = 1, 2, 3\}, \; S_3 \subset V^3,$$

$$S_3 = \{\underbrace{\{\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3\}}_{1}, \underbrace{\{\overline{M}_1, M_2, M_3\}}_{2},$$

$$\underbrace{\{M_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3\}}_{3}, \underbrace{\{M_1, M_2, \overline{M}_3\}}_{4}, \underbrace{\{M_1, M_2, M_3\}}_{5}\} \text{ (fig. 1.15, } c\text{)},$$

Tabla 1.7.

$d(C)$	M_1	M_2	M_3	M
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

En el álgebra considerada $A = \langle B(1), \cup, \cap, \bar{} \rangle$ las operaciones son dependientes. En efecto, debido a la ley según De Morgan se puede construir todo conjunto de 2^{2^n} conjuntos empleando el álgebra $A = \langle B(1), \cup, \bar{} \rangle$. Las álgebras $A = \langle B(1), \cup, \bar{} \rangle$, $A = \langle B(1), \cap, \bar{} \rangle$ son equivalentes en el sentido de engendrar cualquier conjunto de 2^{2^n} conjuntos. Ellas pueden sustituirse por las álgebras $A = \langle B(1), \cup, \setminus, 1 \rangle$, $A = \langle B(1), \cap, \setminus, 1 \rangle$, respectivamente, en virtud de la fórmula $\overline{M} = 1 \setminus M$, donde el universo 1 se examina como operación 0 ádica.

Debido a las igualdades

$$M_a \cup M_b = (M_a \setminus M_b \setminus (M_a \cap M_b),$$
$$M_a \setminus M_b = M_a \setminus (M_a \cap M_b)$$

el álgebra $\langle B(1), \cup, \setminus, 1 \rangle$ puede ser sustituida por el álgebra de tipo $\langle B(1), \cap, \setminus, 1 \rangle$.

Examinemos el problema de minimización de la representación de los conjuntos en el álgebra de Cantor. La intersección de los conjuntos distintos dos a dos $\cap M_i^{a_i}$ se llama *elemental*. La expresión que prefija el conjunto M_i en forma de unión de intersecciones elementales diversas se llama *forma normal de Cantor* (FNC) del *conjunto M*. La unión de constituyentes del conjunto M se denomina FNC *perfecta del conjunto M*.

Llámase FNC *minimal del conjunto M* la FNC de este conjunto la que tiene la complejidad minimal.

Consideremos el *método de Quine* que utilizaremos para obtener una FNC minimal del conjunto M. Este método consiste en el cumplimiento sucesivo de tales etapas.

1. *Formación de los intervalos maximales.* Se denomina *intervalo del conjunto M* un conjunto de constituyentes del conjunto M que forman un hipercubo (de cierta dimensión).

Es obvio, que la potencia de un intervalo es igual a 2 en una potencia (o sea, 2^0, 2^1, etc.).

Por ejemplo, escribamos un conjunto de intervalos para el ejemplo considerado anteriormente: {000, 100, 110, 011, 111, −00, 1−0, 11−, −11}. Aquí y en adelante "−" significa que en conjunto correspondiente a este orden está ausente en la intersección, es decir, después de la unión de constituyentes correspondientes se hizo encolamiento por este conjunto. Por ejemplo, el intervalo −00 correspondiente al conjunto de constituyentes 000 y 100 se obtiene como resultado de la transformación $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 = M_2 \cap M_3$.

El intervalo I_α se denomina *intervalo maximal* $I_{\text{máx}}$ *del conjunto M*, si no existe otro intervalo I_β de este conjunto que contenga el intervalo I_α, $I_\alpha \not\subset I_\beta$.

En el caso dado hay cuatro intervalos maximales: −00, 1 − 0, 11 −, − 11; cada uno de éstos forma un hipercubo de dimensión (arista).

La intersección $\bigcap_i M_i^{\sigma_i}$ que corresponde a un intervalo maximal del conjunto M se denomina *implicante simple* de este conjunto.

La unión de las implicantes simples del conjunto M se llama *FNC abreviada del conjunto M.*

El número de termas primarias que forman una implicante simple se denomina *rango de una implicante simple* y una intersección elemental se llama *rango de un intervalo correspondiente.*

Al formar intervalos maximales, un conjunto de intervalos que tienen un mismo rango se parte en zonas con la particularidad de que *i*-ésima zona contiene intervalos, a los cuales corresponden juegos con *i* unidades en cada uno. Entonces la formación de intervalos maximales se reduce a comparar elementos solamente de zonas *vecinas*, cuyos números difieren en la unidad. Si los intervalos construidos no son maximales, el proceso de comparación continúa.

Los resultados de la comparación para el caso considerado se ofrecen en la fig. 1.16.

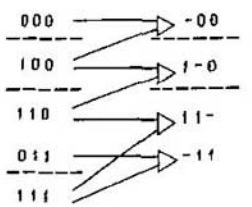


Fig. 1.16

LA FNC abreviada del conjunto $M(M_1, M_2, M_3)$ tiene la forma

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cup M_2 \cap M_3.$$

La primera etapa del método se termina al construir la FNC abreviada del conjunto M.

Llámase FNC *tope del conjunto M* una FNC de este conjunto, la que no determina M al omitir aunque no sea más que una terma primaria.

Lema 1.4. La FNC *minimal del conjunto M es de forma tope.*

□ La complejidad de la FNC minimal del conjunto M no se puede disminuir por eliminar una terma primaria. Por consiguiente, esta forma es de tope. ■

Lema 1.5. La FNC *tope del conjunto M se compone de las implicantes simples de este conjunto.*

□ Si al menos una intersección corresponde a un intervalo no maximal del conjunto M, se puede cambiar esta intersección por una implicante simple eliminando las termas primarias correspondientes, sin salir de la clase de las FNC equivalentes (que dan un mismo conjunto) del conjunto M, lo que contradice a la definición de la FNC tope. ■

Teorema 1.6. La FNC *tope del conjunto M, inclusive la FNC minimal, se contiene en la FNC abreviada de este conjunto.*

□ La FNC tope del conjunto M, inclusive la FNC minimal, debido al lema 1.5, consta de las implicantes simples. La FNC abreviada del conjunto M incluye todas las implicantes simples. Por consiguiente, la FNC tope (minimal) del conjunto M se contiene en la FNC abreviada de este conjunto. ■

En virtud del teorema 1.6, la construcción de la FNC tope del conjunto M se reduce al cubrimiento de una tabla bidimensional.

Llámase *cubrimiento de las columnas por las filas en una tabla bidimensional* tal conjunto de filas, en el cual para cada columna existe por lo menos una fila de este conjunto, intersecándose con la cual esta columna tiene unidad, con la particularidad de que al eliminar aunque no sea más que un elemento de este conjunto de filas, la propiedad indicada no se cumple.

2. *Construcción y cubrimiento de la tabla de Quine.* La tabla de Quine es una tabla bidimensional, a cada fila de la cual le corresponde unívocamente un intervalo maximal y a cada columna, una constituyente, mientras que en el lugar de intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna se encuentra la unidad, si la j-ésima constituyente se incluye en el i-ésimo intervalo maximal. En el caso contrario no se escribe nada o se pone 0 en la célula (i, j).

Para el caso considerado, la tabla de Quine tiene tal forma:

Tabla 1.8

Intervalo maximal	Constituyente				
	000	100	110	011	111
-00	1	1			
$1-0$		1	1		
$11-$			1		1
-11				1	1

Un intervalo maximal se denomina *obligatorio*, si existe una constituyente que pertenece a él, y sólo a él. Un conjunto de intervalos obligatorios forma el *núcleo del cubrimiento*.

En nuestro caso el núcleo del cubrimiento es el conjunto $\{-00, -11\}$ que cubre la primera, la segunda, la cuarta y la quinta columnas. Para formar un cubrimiento, se puede tomar ora la segunda, ora la tercera fila. Como resultado obtenemos dos cubrimientos: $\{-00, -11, 1-0\}$, $\{-00, -11, 11-\}$, cada uno de los cuales es minimal y tiene la complejidad 6. Para mayor precisión elijamos el primero de los cubrimientos que corresponde a la FNC minimal que prefija el conjunto $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_2 \cap M_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_3$. Como resultado de la simplificación, la complejidad $L(M)$ disminuyó de 15 a 6.

La FNC minimal se determina como resultado del sondeo de todos los cubrimientos realizado empleando la transformación de una forma multiplicativo-aditiva en una forma aditivo-multiplicativa.

Para el ejemplo considerado identifiquemos cuatro filas de la tabla 1.8 por las letras *a, b, c, d,* respectivamente. Escribamos un conjunto de filas, cada elemento del cual cubre *j*-ésima columna:

$$j = 1 \to A_1 = \{a\},\ j = 2 \to A_2 = \{a, b\},$$
$$j = 3 \to A_3 = \{b, c\},\ j = 4 \to A_4 = \{d\},\ j = 5 \to A_5 = \{c, d\}.$$

El cubrimiento de columnas con las filas de esta tabla es un conjunto de filas que cubre todas las columnas de la tabla, y al eliminar aunque no sea más que una de estas filas, existirá una columna no cubierta. Por consiguiente, si se representa cada uno de los conjuntos A_j en forma de la unión de sus elementos y se halla la intersección de todos los conjuntos A_j, $\bigcap_j A_j$, cada intersección en la forma aditiva obtenida corresponde a un cubrimiento y el número de todos los cubrimientos es igual al número de distintas

intersecciones en la forma aditivo-multiplicativa obtenida:

$$\bigcap_j A_j = a \cap (a \cup \bar{b}) \cap (b \cup c) \cap d \cap (c \cup d) =$$
$$= a \cap (b \cup c) \cap d = a \cap b \cap d \cup a \cap c \cap d.$$

Las intersecciones obtenidas $a \cap b \cap d$ y $a \cap c \cap d$ engendran dos cubrimientos: $\{-00, 1-0, -11\}$ y $\{-00, 11-, -11\}$; cada uno de los últimos corresponde a FNC minimal del conjunto prefijado M.

La disminución sucesiva de la complejidad de expresión que determina un conjunto prefijado es posible en caso de pasar de la clase de FNC a la de formas paréntesis de Cantor (FPC). Una expresión que determina el conjunto M se denomina *forma paréntesis de Cantor* si, excepto las termas primarias y los signos de operaciones de unión e intersección, la integran los paréntesis (,).

En el ejemplo examinado la complejidad de representación del conjunto, igual a 6, disminuye hasta 5 debido al empleo de la ley distributiva de intersección respecto a la unión $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M}_3 \cap (M_1 \cup \overline{M}_2) \cup M_2 \cap \cap M_3$.

La transformación de una forma multiplicativo-aditiva en aditivo-multiplicativa se denomina *método de Petrick* que puede definirse *por un algoritmo* correspondiente.

Definición intuitiva (ingenua) de algoritmo. Un conjunto de reglas que poseen las propiedades *de masa* (invariabilidad respecto a la información de entrada), *determinatividad* (univocidad de la aplicación de estas reglas a cada paso), *resultatividad* (obtención, después de haber aplicado estas reglas, de una información que es resultado) y *elementalidad* (está ausente la necesidad de precisar ulteriormente las reglas) se denomina *algoritmo.*

§ 1.7. Problemas y ejercicios

1.1. Demostrar que

$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A \leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \leftrightarrow \overline{A} \cup B = \mathbf{1}.$$

1.2. Demostrar que

$$A \cap (B \setminus A) = \varnothing, \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

1.3. Resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

donde A, B, C son los conjuntos prefijados y $B \subset A \subset C$.

1.4. Demostrar que

$$A = B \leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing.$$

1.5. Demostrar que si las relaciones R_1 y R_2 son reflexivas, las relaciones $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ son también reflexivas.

1.6. Demostrar que si las relaciones R_1 y R_2 son simétricas, las relaciones $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ son también simétricas.

1.7. Demostrar que un conjunto finito de potencia n contiene $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos distintos de potencia $p \leqslant n$.

1.8. Demostrar que $\bigcup_i M_i$ es el conjunto mínimo que comprende todos los conjuntos M_i.

1.9. Demostrar que $\bigcap_i M_i$ es el conjunto máximo que se contiene en todos los M_i.

1.10. Demostrar que si M_a, M_b, M_c y M_d no son vacíos, se tiene

a) $M_a \subset M_b$ y $M_c \subset M_d \leftrightarrow M_a \times M_c \subset M_b \times M_d$;
b) $M_a = M_b$ y $M_c = M_d \leftrightarrow M_a \times M_c = M_b \times M_d$;

1.11. Demostrar que

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_{a_i} \times \bigcap_{i=1}^{n} M_{b_i} = \bigcap_{i=1}^{n} (M_{a_i} \times M_{b_i}).$$

1.12. Demostrar que

$$(M_a \times M_b) \cup (M_c \times M_d) \subset (M_a \cup M_c) \times (M_b \cup M_d).$$

Verificar en qué caso tiene lugar la igualdad en esta fórmula.

1.13. Demostrar que

a) $(M_a \cup M_b) \times M_c = (M_a \times M_c) \cup (M_b \times M_c)$;
b) $M_a \times (M_b \cup M_c) = (M_a \times M_b) \cup (M_a \times M_c)$
c) $(M_a \cup M_b) \times (M_c \cup M_d) =$
$= (M_a \times M_c) \cup (M_b \times M_c) \cup (M_a \times M_d) \cup (M_b \cup M_d)$;

d) $\bigcup_{i=1}^{n} M_{a_i} \times \bigcup_{j=1}^{n} M_{b_j} = \bigcup_{i,j=1,\ldots,n} (M_{a_i} \times M_{b_j})$;

e) $\bigcap_{i=1}^{n} M_{a_i} \times \bigcap_{j=1}^{n} M_{b_j} = \bigcap_{i,j=1,\ldots,n} (M_{a_i} \times M_{b_j})$.

1.14. Construir una relación binaria:
a) reflexiva, simétrica, intransitiva;
b) reflexiva, transitiva, asimétrica;
c) irreflexiva, antisimétrica, transitiva;
d) reflexiva, antisimétrica, intransitiva.

1.15. ¿Cuáles entre las siguientes relaciones son unívocas, cuáles son inversamente unívocas y cuáles son biunívocas:

$(x, y) \in R \leftrightarrow y$ es el padre de x,
$(x, y) \in R \leftrightarrow y$ es el hijo de x,
$(x, y) \in R \leftrightarrow x = y^2$,
$(x, y) \in R \leftrightarrow x^2 = y$,
$(x, y) \in R \leftrightarrow |x + 5| > |3 - y|$?

1.16. Hallar el número de todas las posibles relaciones binarias antisimétricas entre los elementos de un conjunto finito que se compone de n elementos.

1.17. Sean M un conjunto de todos los paralelogramos en un plano, A_1, un conjunto de cuadrados, A_2, un conjunto de rectángulos, A_3, un conjunto de rombos en un plano. Hallar los resultados de las siguientes relaciones: $A_i \cup A_j$, $A_i \cap A_j$, $A_i \cap \overline{A_j}$; $i, j = 1, 2, 3$.

1.18. Demostrar que dos conjuntos son iguales si, y sólo si, los resultados de su intersección y su unión coinciden.

1.19. Es sabido que entre 100 estudiantes 28 son los aficionados a la pintura, 42, al deporte, 30, a la música, 10, a la pintura y el deporte, 8, a la pintura y la música, 5 al deporte y la música, 3 a la pintura, el deporte y la música. Determinar:

a) el número de estudiantes aficionados solamente al deporte;

b) no aficionados a la nada.

1.20. Verificar si el álgebra, cuyo portador es $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ y cuya signatura es operación de adición según el modulo p, forma un grupo.

1.21. Dilucidar si una álgebra, cuyo portador es $\{0, 1, 2, \ldots p-1\}$ y cuya signatura es operación de multiplicación según el módulo p, forma un grupo.

1.22. ¿Representa un campo el álgebra, cuyo portador es $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ y cuya signatura son operaciones de adición y de multiplicación según el módulo p?.

1.23. Demostrar que en el conjunto de números enteros de 1 a k, la relación $\leqslant$ puede ser prefijada por una matriz triangular de adyacencia.

1.24. Demostrar que cualquier subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado no tiene más que una cota superior y una inferior.

1.25. Para un conjunto de vectores binarios de longitud 4 construir un grafo que prefija la relación $X_a \leqslant X_b \leftrightarrow (\forall x_{a_i}, x_{b_i})\ (x_{a_i} \leqslant x_{b_i})$. Dilucidar, si este grafo prefija el álgebra de Boole. Si prefija el resultado de operaciones de multiplicación y adición.

1.26. Designemos mediante $\langle M_a \times M_b, \varrho\rangle = R_a \times R_b$, $R_a = \langle M_a, \leqslant\rangle$, $R_b = \langle M_b, \leqslant\rangle$ un conjunto, para el cual $(m_{a_i}, m_{b_i})\varrho\ (m_{a_j}, m_{b_j}) \leftrightarrow m_{a_i} \leqslant m_{a_j} \,\&\, m_{b_i} \leqslant m_{b_j}$. Demostrar que:

a) $R_a \times R_b$ es un conjunto parcialmente ordenado;

b) $R_a \times R_b$ es una cadena solamente en el caso cuando R_a o R_b consta de un elemento.

1.27. Demostrar que toda cadena es un retículo distributivo.

1.28. Un intervalo $[a, b]$ de un conjunto parcialmente ordenado se compone de todos los elementos x que satisfacen la condición $a \leqslant x \leqslant b$. Demostrar que: a) la intersección de dos intervalos es intervalo (tal vez, vacío); b) en un retículo cualquier intervalo es subretículo.

1.29. Examinemos la unión del conjunto de los números mutuamente simples M y un conjunto de todos los productos, cuyos factores son elementos del conjunto M. En esta unión definamos la adición y la multiplicación como cálculo del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, respectivamente. Verificar si la colección de la unión de conjuntos examinados y operaciones de adición y multiplicación es el álgebra de Boole.

1.30. Demostrar que en todo anillo conmutativo

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i + b^n.$$

1.31. Demostrar que en todo anillo conmutativo

$$a^m a^n = a^{m+n},\ (ab)^n = a^n b^n,\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

1.32. Al examinar la colección $\langle 0, +, \cdot\rangle$, donde $0 + 0 = 0$ y $0 \cdot 0 = 0$, y averiguar si es un anillo; un cuerpo; un campo.

1.33. Demostrar que el número mínimal de cadenas en la representación de un conjunto finito parcialmente ordenado en forma de suma de las cadenas es igual al número máximal de elementos no comparables dos a dos.

1.34. Demostrar que en cada retículo se tiene:

a) $(a \leqslant b) \,\&\, (c \leqslant d) \to a \cup c \leqslant b \cup d$;

b) $(a \leqslant b) \,\&\, (c \leqslant b) \to a \cup c \leqslant b$;

c) $(a \leqslant b) \to (\forall c)\ (a \cup c \leqslant b \cup c)$;

d) $(a \leqslant b) \,\&\, (c \leqslant d) \to a \cap c \leqslant b \cap d$;

e) $(a \leqslant b) \,\&\, (a \leqslant c) \to a \leqslant b \cap c$;

f) $(a \leqslant b) \to (\forall c)\ (a \cap c \leqslant b \cap c)$.

1.35. Demostrar que en cada retículo para cualesquier elementos a, b, c:

a) $a \cup b \cap c \leqslant (a \cup b) \cap (a \cup c)$;
b) $a \cap (b \cup c) \geqslant a \cap b \cup a \cap c$;
c) $a \leqslant b \to a \cup b \cap c \leqslant (a \cup c \cap b$.

1.36. Demostrar que un retículo es modular si, y sólo si, para cualesquier elementos a, b, c se tiene

$$a \cap b \cup c \cap (a \cup b) = (a \cap c \cup b) \cap (a \cup b).$$

1.37. Demostrar que un retículo es distributivo si, y sólo si, para cualesquiera tres elementos a, b, c se tiene

$$a \cap (b \cup c) \cup b \cap c = (c \cup a \cap b) \cap (a \cup b).$$

1.38. Hallar un conjunto de "figuras prohibidas" que pone un conjunto parcialmente ordenado fuera de la clase de retículos.

1.39. Un *espacio métrico* es una colección del conjunto M con una *distancia* prefijada en él $s(m_a, m_b)$ entre cualesquier dos elementos $m_a, m_b \in M$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$s(m_a, m_b) > 0$, si $m_a \neq m_b$ y $s(m_a, m_a) = 0$, si los elementos coinciden;
$s(m_a, m_b) = s(m_b, m_a)$;
$s(m_a, m_b) + s(m_b, m_c) \geqslant s(m_a, m_c)$ (la condición triangular).

Prefijar una métrica en un hipercubo y averiguar lo que representa.

1.40. Demostrar que en la FNC perfecta del conjunto M la igualdad no se rompe, si cambia cada operación de unión por la de diferencia simétrica.

1.41. Verificar, si la forma $M(M_1, M_2, M_3) = M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_1 \cap M_3 \cup \overline{M}_2$ es perfecta.

1.42. Verificar, si la forma $M(M_1, M_2, M_3) = M_1 \cap \overline{M}_2 \cup M_1 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_3$ es abreviada.

1.43. Averiguar, si se puede trasmitir una sucesión de símbolos en el canal de trasmisión en forma de mografo.

1.44. En la clase de las formas normales de Cantor minimizar el conjunto M, dado como la unión de sus constituyentes: $M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \cup(0, 2, 7, 8, 11, 14, 15)$, donde los números decimales son equivalentes numéricos de vectores binarios que determinan las constituyentes correspondientes de este conjunto.

1.45. Determinar la complejidad de la forma de paréntesis minimal del conjunto M prefijado por su forma normal:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_5 \cup M_1 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_6 \cup M_2 \cap \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6.$$

1.46. Hallar el número de las FNC tope del conjunto

$$M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cup \overline{M}_1 \overline{M}_k \cap M_4 \cup M_2 \cap \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap \overline{M}_4 \cup M_1 \cap \overline{M}_3 \cap M_4.$$

1.47. Determinar el rango (número de constituyentes) del conjunto

$$M(M_1, M_2, \ldots, M_6) = (M_4 \cap M_6 \cup M_1 \cap M_2) \cap (M_1 \cap M_3 \cup \cup M_5 \cap M_6).$$

1.48. Hallar la FNC minimal del conjunto M, determinado en un espacio cuadridimensional: $M = \cup(1 - 00, -110, 0101, -0 - 1, 0010, -01 -, 0 - 0 -)$.

1.49. Determinar la disminución de la potencia de la signatura de un mografo $G^M(M)$ que determina el conjunto $M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \cup(0, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15)$ después de la minimización en la clase de FNC.

1.50. Determinar la disminución de la potencia del portador de un mografo $G^M(M)$ que determina el conjunto $M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \cup(0, 1, 2, 3, 5, 11, 15)$ después de la minimización en la clase de FNC.

1.51. Hallar la forma de paréntesis minimal de la representación de un conjunto $M(M_1, M_2, M_3, M_4)$ que contiene intervalos $0 - 01$, $01 - 1$, $110 -$, $01 - 0$ y no contiene intervalos $10 - 1$, $111 -$ y $00 - 0$.

Comentarios

La teoría de los conjuntos fue reconocida oficialmente en 1897, en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos, en el cual Hadamard y Hurwitz dieron numerosos ejemplos de la aplicación de esta teoría en el análisis matemático. La teoría de los conjuntos fue la base de la creación de los sistemas algebraicos que tienen gran aplicación práctica en el diseño del apoyo matemático de los ordenadores. A. I. Máltzev y J. D. Birkhoff hicieron gran aporte al desarrollo de la teoría de los sistemas algebraicos. La teoría de los modelos, cuya signatura posee la propiedad de simetría (modelos simétricos), se desarrolla de modo especialmente tempetuoso. Esta clase de modelos permite considerar eficazmente el objeto investigado como una "caja negra". Los elementos (constructivos o funcionales) del objeto forman el portador del modelo y su signatura determina su interrelación. Para prefijar los modelos de esta clase en forma óptima, fue propuesto el concepto de *mografo*, tres años más tarde fue "introducido" de nuevo en Francia e identificado por el término de *hipergrafo*.

Los conceptos algebraicos son muy eficientes para proyectar los sistemas complejos de mando, ordenadores, sistemas de cálculo y redes de los ordenadores, bancos de datos y paquetes de programas aplicados. A mediados de los años 70 fue hecho un gran paso por el camino de resolver el superproblema de *"enunciar qué hacer sin detallar cómo"*. Este paso fue hecho empleando el *lenguaje de conjuntos*, SETL, en el cual la construcción principal es un conjunto que permite simular objetos complejos en el programa.

Para profundizar los conocimientos de los sistemas algebraicos, recomendamos la literatura adicional enumerada en la bibliografía.

"...la práctica del hombre, que se repite mil millones de veces, se consolida en la conciencia del hombre mediante las figuras de la lógica. Precisamente (y sólo) debido a esta repetición de mil millones de veces, estas figuras tienen la estabilidad de un prejuicio, un carácter axiomático".

V. I. Lenin, "Cuadernos filosóficos"

CAPÍTULO 2
Lógica matemática

§ 2.1. Lógica de enunciaciones.

Se denomina *enunciación* una oración narrativa, sobre la cual se puede decir que en un momento dado es verdadero o falso, pero no es la primera ni la otra simultáneamente. La "veracidad" y la "falsedad" de una oración es el verdadero valor de la enunciación. Ponemos en correspondencia a cada enunciación una variable igual a 1, si la enunciación es *verdadera* o igual a 0, si es *falsa*. Si P y Q son ciertas enunciaciones se puede formar las enunciaciones P o Q, P y Q, no P introduciendo las operaciones de *disyunción* $\vee$, de *conjunción* & y de *negación*. Los resultados de estas operaciones se prefijan por las tablas de veracidad ("disyunción", tabla 2.1, *a*; "conjunción", tabla 2.1, *b*; "negación", tabla 2.1, *c*), a cada fila de las cuales corresponde biunívocamente un juego de valores de las enunciaciones componentes y el correspondiente valor de la enunciación compuesta.

Tabla 2.1, a

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabla 2.1, b

P	Q	$P \& Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 2.1, c

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Las operaciones de disyunción, conjunción y negación se leen como "O", "Y" y "NO", respectivamente.

Señalemos las leyes principales que determinan estas operaciones:

idempotente de disyunción y conjunción

$$a \vee a = a, \quad a \& a = a; \tag{2.1}$$

conmutativa de disyunción y conjunción

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \& b = b \& a; \tag{2.2}$$

asociativa de disyunción y conjunción

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \&(b \& c) = (a \& b)\& c; \tag{2.3}$$

distributiva de conjunción respecto a la disyunción y de disyunción respecto a la conjunción

$$a\&(b \vee c) = a\&b \vee a\&c; \tag{2.4 a}$$

(*Nota.* No ponemos los paréntesis en la expresión $a\&b \vee a\&c$, ya que la conjunción &, como una operación multiplicativa, es mayor que la disyunción (que es una operación aditiva) y se cumple en primer lugar.)

$$a \vee b\&c = (a \vee b)\&(a \vee c); \tag{2.4 b}$$

de negación doble

$$\bar{\bar{a}} = a; \tag{2.5}$$

según De Morgan

$$\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a\&b},\ \bar{a}\&\bar{b} = \overline{a \vee b}; \tag{2.6}$$

de encolamiento

$$a\&b \vee a\&\bar{b} = a,\ (a \vee b)\&(a \vee \bar{b}) = a \tag{2.7}$$

de absorción

$$a \vee a\&b = a,\ a\&(a \vee b) = a; \tag{2.8}$$

leyes que determinan las operaciones con las constantes 0 y 1:

$$a \vee 0 = a,\ a\&0 = 0,\ a \vee 1 = 1$$
$$a\&1 = a,\ a \vee \bar{a} = 1,\ a\&\bar{a} = 0. \tag{2.9}$$

Todo enunciado compuesto con ayuda de las operaciones $\vee$, &, $^-$ tiene cierto valor veraz que depende de los valores de las enunciaciones componentes. Cualequier enunciación f puede ser prefijada en forma de una *tabla de veracidad.* Si el valor de la enunciación f depende de n enunciaciónes componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la tabla de veracidad contiene 2^n filas. Una enunciación componente x_i se denominará *enunciación atómica* o simplemente *variable* x_i examinando con esto la enunciación compuesta como una función f de n variables. La función f que toma uno de dos valores, 0 ó 1, y depende de n variables, cada una de las cuales toma uno de dos valores, 0 ó 1, se denominará *función booleana* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables.

Por ejemplo, examinemos un dispositivo que fija la aprobación de una resolución por un comité de los "tres". Cada miembro del comité aprieta su tecla, si aprueba la resolución; si la mayoría de los miembros están de acuerdo, la resolución se aprueba, lo que se fija por el dispositivo registrador. El dispositivo realiza la enunciación $f(x_1, x_2, x_3)$, cuya tabla de veracidad tiene forma de la tabla 2.2.

Tabla 2.2

x_1 x_2 x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1 x_2 x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	0	1 0 0	0
0 0 1	0	1 0 1	1
0 1 0	0	1 1 0	1
0 1 1	1	1 1 1	1

Se puede construir el cálculo de enunciaciones empleando las correspondientes tablas de veracidad. Con ello, es evidente que el álgebra de enunciaciones es isomorfa al álgebra de Boole $\langle M, \vee, \&, \bar{} \rangle$, los elementos de cuyo portador toman valores 0 ó 1 y la signatura $\vee$, &, $\bar{}$ posee las propiedades de operaciones de los retículos distributivos con complementos. El álgebra de Boole es la más simple en la clase de las álgebras booleanas; es una álgebra booleana de dos elementos. El álgebra de enunciaciones y las leyes que determinan su signatura pueden obtenerse, si consideramos formalmente el caso límite de retículos: un retículo de dos elementos, en el cual $a \cup b = b$, cuando $a \leqslant b$. Este retículo se transforma en el álgebra booleana, si ponemos $\bar{a} = b$, $\bar{b} = a$. Uno de los elementos del álgebra booleana es 0, ya que el álgebra booleana es un retículo con complementos y por esta razón segundo elemento de esta álgebra es 1.

En virtud de los teoremas 1.2 y 1.4, cada enunciación y su correspondiente función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ puede representarse en forma de disyunción de constituyentes

$$\&_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i},$$

donde

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{cuando } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i & \text{cuando } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Para el ejemplo a examinar $f(x_1, x_2, x_3)$ puede representarse en forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

A continuación la representación de una función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en forma de disyunción de constituyentes se denominará *forma normal disyuntiva* (FND) *perfecta de la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Llamaremos *terma primaria* una variable o su negación.

El número de termas primarias que llevan una forma que prefija una función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se denomina *complejidad* $L(f)$ *de esta forma.*

La complejidad de la FND perfecta de la función $f(x_1, x_2, x_3)$ de la votación es igual a 12. Disminuyamos la complejidad de esta función

empleando identidades principales del álgebra de Boole. Según las propiedades idempotentes de la disyunción, se tiene

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Utilizando las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva obtenemos

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_1)x_2x_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2)x_1x_3 \vee (x_3 \vee \bar{x}_3)x_1x_2.$$

Finalmente tenemos

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 = x_3(x_2 \vee x_1) \vee x_1x_2.$$

A consecuencia obtenemos la complejidad $L(f)$ de la función $f(x_1, x_2, x_3)$, igual a 5.

Las funciones $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $f_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llaman *iguales*, si sobre cada uno de los juegos binarios $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

$$f_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = f_\beta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

§ 2.2. Minimización de las funciones booleanas en la clase de las FND

Empleando el isomorfismo del álgebra de Boole y del álgebra de conjuntos se puede aplicar con éxito el método de tablas implicantes, para minimizar las funciones booleanas.

Examinemos con anticipación una descomposición de la función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecto a k variables (con precisión respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_k$): *descomposición de Shannon.*

Teorema 2.1. *Cualquiera función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es representable en forma de descomposición de Shannon:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{por todos} \\ \text{los juegos} \\ (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)}} \left(\mathop{\&}_{i=1}^{k} x_i^{\sigma_i} \right) f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

$$\ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (2.10)$$

donde $\sigma_i = 0,1$; $i = 1, \ldots, k$, $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{cuando } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i & \text{cuando } \sigma_i = 0. \end{cases}$

□ Empleando el método de inducción completa, demostremos que $x_i^{\sigma_i} = 1 \leftrightarrow x_i = \sigma_i$ (tabla 2.3).

Tabla 2.3

x_i	σ_i	$x_i^{\sigma_i}$	x_i	σ_i	$x_i^{\sigma_i}$
0	0	$\bar{0} = 1$	1	0	$\bar{1} = 0$
0	1	0	1	1	1

En vez de las primeras k variables sustituyamos arbitrariamente sus valores: $x_1 = \sigma_1^*$, $x_2 = \sigma_2^*$, . . ., $x_k = \sigma_k^*$. Entonces el primer miembro de la fórmula que se demuestra es igual a $f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. El segundo miembro es la disyuncción de 2^k conjunciones de tipo $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots x_n)$ que se parten en dos clases mediante esta sustitución. La primera clase incluye la conjunción, para la cual el juego $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ coincide con el juego $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_k^*)$:

$$(\sigma_1^*)^{\sigma_1}(\sigma_2^*)^{\sigma_2} \ldots (\sigma_k^*)^{\sigma_k} f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \ldots$$
$$\ldots, x_n) = 1 \cdot 1 \ldots 1 \cdot f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \ldots$$
$$\ldots, x_n) = f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Esta conjunción es igual al primer miembro de la fórmula. La segunda clase incluye $2^k - 1$ conjunciones, cada una de las cuales tiene $\sigma_i^* \neq \sigma_i$ por lo menos en una variable x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por consiguiente, cada una de ellas es igual a cero.

Entonces, en virtud de la ley que caracteriza operaciones con las constantes, $a \vee 0 = a$, obtenemos que los miembros segundo y derecho de las fórmulas son iguales entre sí para cualesquiera sustitución de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$. ■

Corolario. Una descomposición límite de Shannon ($k = n$) de la función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, distinta de cero, tiene forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{por todos} \\ \text{los juegos} \\ (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ \text{sobre los cuales} \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} \overset{n}{\underset{i=1}{\&}} x_i^{\sigma_i} \tag{2.11}$$

La descomposición límite de Shannon de la función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es su *forma normal disyuntiva perfecta.*

En el álgebra de Boole es válido el principio de dualidad puesto que, como fue demostrado en el capítulo 1, ella es un retículo distributivo con complemento. Debido a este principio, tenemos las siguientes descomposiciones duales de Shannon de la función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$:

según a k variables

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \underset{\substack{\text{por todos} \\ \text{los juegos} \\ (\sigma_1, \\ \sigma_2, \ldots, \sigma_k)}}{\&} \left(\bigvee_{i=1}^{k} \overline{x_i^{\sigma_i}} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \right.$$

$$\left. x_{k+1}, \ldots, x_n) \right); \tag{2.12}$$

la descomposición límite dual

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{\substack{\text{por todos}\\ \text{los juegos}\\ (\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\\ \sigma_n)\\ \text{sobre los}\\ \text{cuales } f(\sigma_1,\\ \sigma_2, \ldots\\ \ldots, \sigma_n) = 0}}{\&} \left(\bigvee_{i=1}^{n} \bar{x}_i^{\sigma_i} \right) \tag{2.13a}$$

La descomposición límite de Shannon de la función booleana $f(x_1, \ldots x_2, \ldots, x_n)$ es su *forma normal cojuntiva* (FNCj) *perfecta.*

Ejemplo 2.1 Construyamos las FND y FNCj perfectas de la función booleana $f(x_1, x_2, x_3)$ prefijada según la tabla de veracidad (tabla 2.4).

Tabla 2.4

x_1 x_2 x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1 x_2 x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	1	1 0 0	0
0 0 1	0	1 0 1	1
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	0	1 1 1	1

Las FND y FNCj perfectos de esta función tienen, respectivamente, la forma

$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$;

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

En adelante se considerará la teoría de la FND, de la cual es fácil construir la teoría de la FNCj basándose en el principio de dualidad.

Prefijemos una función booleana $f(x_1, x_2, x_n)$ con ayuda de un hipercubo, a cada vértice del cual le corresponde biunívocamente un juego binario $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$; los vértices están ordenados por niveles: el i-ésimo nivel contiene $\binom{n}{i}$ vértices, a los cuales les corresponden los juegos binarios que contienen i unidades; los vértices se unen por una arista, si sus juegos binarios correspondientes se distinguen en un, y sólo en un, orden.

Los juegos binarios se prefijan con frecuencia por equivalentes decimales $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{n-i}$ y la función booleana, por la enumeración de equivalentes decimales que corresponden a las constituyentes (a las conjunciones de la descomposición límite de Shannon). Por ejemplo, $f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 2, 3, 7)$ (tabla 2.5).

Tabla 2.5

Equivalente decimal	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	Equivalente decimal	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	4	1	0	0	0
1	0	0	1	1	5	1	0	1	0
2	0	1	0	1	6	1	1	0	0
3	0	1	1	1	7	1	1	1	1

Los vértices, en los cuales $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ y que forman un hipercubo engendran el *intervalo unitario* de esta función. Un intervalo unitario $\mathbf{I}_a$ de una función booleana f se denomina *maximal*, si no existe ningún intervalo unitario $\mathbf{I}_b$ que incluye $\mathbf{I}_a$.

En el ejemplo dado los intervalos unitarios son los conjuntos de vértices: {0}, {1}, {2}, {3}, {7}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {3, 7}, {0, 1, 2, 3}; los intervalos maximales son {0, 1, 2, 3}, {3, 7}.

La conjunción que corresponde al intervalo unitario maximal de la función f se denomina *implicante simple* de esta función:

$\{0, 1, 2, 3\} \leftrightarrow \bar{x}_1$, $\{3, 7\} \leftrightarrow x_2x_3$.

Prefijaremos un intervalo unitario por la enumeración de vértices y, también, con ayuda de una sucesión de símbolos 0, 1, —, donde el guión significa que en la conjunción está ausente la variable correspondiente: $\{0, 1, 2, 3\} \leftrightarrow 0 - -$, $\{3, 7\} \leftrightarrow -11$.

La disyunción de todas las implicantes simples de una función booleana se denomina FND *abreviada* de esta función.

El paso de la FND perfecta a la abreviada es unívoco y se realiza empleando la comparación de dos a dos entre las constituyentes de los niveles vecinos (cuyos números difieren en unidad).

Tienen gran importancia las *funciones booleanas débilmente definidas* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que poseen las siguientes propiedades:

1) el número de variables n es grande;

2) la potencia de la unión de las regiones unitaria V_1 y nula V_0 es mucho menor que 2^n, donde estas regiones se forman mediante los vértices, en los cuales la función es igual a 1 y 0, respectivamente;

3) las regiones unitaria y nula se prefijan por los intervalos correspondientes.

El conjunto de los vértices de un hipercubo, sobre los cuales una función es igual a 0 y que forman un hipercubo, se denomina *intervalo nulo*. La FND abreviada de las funciones débilmente definidas se construye con ayuda de la tabla de distinciones.

Llámase *tabla de distinciones* una tabla bidimensional de orden $n \times |V_0|$, a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente un orden

del intervalo unitario, que se examina y a una columna, el intervalo nulo. En la intersección de la i-ésima fila con la j-ésima columna está el resultado de la operación:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad - \oplus 0 = 0,$$
$$0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad - \oplus 1 = 0,$$
$$0 \oplus - = 0, \quad 1 \oplus - = 0 \quad - \oplus - = 0,$$

con la particularidad de que en calidad del primer argumento se toma el valor del i-ésimo orden del intervalo unitario y del segundo, el valor del i-ésimo orden del intervalo nulo correspondiente a la j-ésima columna.

La formación de intervalos maximales se reduce al cubrimiento de las columnas por las filas de la tabla de distinciones. En efecto, los intervalos maximales en las funciones débilmente definidas constan de los vértices de las regiones unitaria e incompletamente definida. La unidad en una célula (i, j) de la tabla de distinciones muestra que si dejamos el i-ésimo orden en la conjunción, el j-ésimo intervalo nulo no se incluye en el hipercubo que corresponde a esta conjunción. Por consiguiente, el cubrimiento de las columnas por las filas engendra un intervalo maximal de la función booleana débilmente definida, que se examina.

Ejemplo 2.2. Consideremos como se halla la FND minimal de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \begin{cases} 1 \text{ en los intervalos } 0-0-0-0,\ 11-0-01,\ 0- \ -001-, \\ 0 \text{ en los intervalos } 10-0-01,\ 00- \ -10-,\ 1101-0-, \end{cases}$$

o una función prefijada con ayuda de equivalentes decimales de los elementos minimales y maximales de los correspondientes intervalos que se obtienen sustituyendo los códigos nulo 00 . . . 0 y unitario 11 . . . 1 en vez de guiones,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \begin{cases} 1 \text{ en los intervalos } (0, 42),\ (97, 117),\ (2, 51); \\ 0 \text{ en los intervalos } (65, 85),\ (4, 29),\ (104, 109). \end{cases}$$

Formemos un conjunto de intervalos maximales $\{I_{\text{máx}}\}$, que contienen un intervalo unitario (0, 42), por la tabla de distinciones (tabla 2.6, *a*), cuyas filas se identifican por las letras *a, b, c, d, e, g, h.*

Tabla 2.6, a

Intervalo unitario		Intervalos nulos		
		(65, 85)	(4, 29)	(104, 109)
a	0	1	0	1
b	–	0	0	0
c	0	0	0	0
d	–	0	0	0
e	0	0	1	0
g	–	0	0	0
h	0	1	0	0

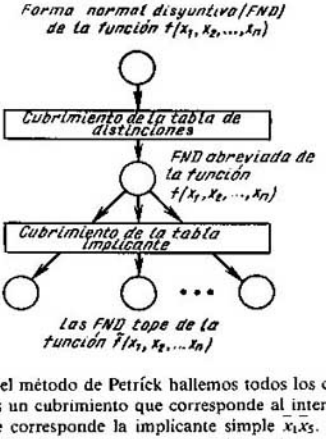


Fig. 2.1

Al emplebar el método de Petrick hallemos todos los cubrimientos de esta tabla ($a \vee h$) $ea = ae$. Tenemos un cubrimiento que corresponde al intervalo maximal $0 - - - 0 - -$ (0, 59), al cual le corresponde la implicante simple $\bar{x}_1\bar{x}_5$.

De modo análogo hallamos conjuntos de intervalos maximales que contienen los demás intervalos unitarios:

$$|I_{\text{máx}} \supset (97,\ 117)| = |(32,\ 119)| \to x_2\bar{x}_4;$$

$$|I_{\text{máx}} \supset (2,\ 51)| = |(0,\ 59),\ (2,\ 123)| \leftrightarrow \bar{x}_1\bar{x}_5,\ \bar{x}_5x_6.$$

Como resultado se ha obtenido la FND abreviada de la función booleana $\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots x_7)$ que ya es completamente definida. La región unitaria $\tilde{V}_1$ de la función $\tilde{f}$ contiene la región unitaria V_1 de la función f, $\tilde{V}_1 \supset V_1$, la región nula $\tilde{V}_0$ de la función $\tilde{f}$ comprende la región V_0 de la función f, $\tilde{V}_0 \supset V_0$:

$$\tilde{f}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_7) = \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5x_6.$$

La formación de los intervalos maximales y la construcción de la FND abreviada de la función $\tilde{f}$ es la primera etapa de la minimización en la clase de las FND. La segunda etapa es el paso de la FND abreviada de la función f a la FND tope de esta función (fig. 2.1).

Se llama FND *tope de la función booleana* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ una FND que no determina la función f con una exactitud de región incompletamente definida cuando se elimina aunque más no sea que una terma primaria arbitraria x^{σ_i}. La FND tope de una función booleana se obtiene como resultado del cubrimiento de las columnas por las filas de una tabla implicante (una tabla bidimensional, en la cual a cada fila le corresponde biunívocamente un intervalo maximal, y a cada columna, un intervalo unitario, mientras que en la intersección de una i-ésima fila con una j-ésima columna se encuentra 1, si el j-ésimo intervalo se incluye en el i-ésimo intervalo maximal, en el caso contrario en la intersección se encuentra 0).

Construyamos una tabla implicante para el ejemplo considerado (tabla 2.6, *b*).

Tabla 2.6, b

Intervalos unitarios maximales de la función f	Intervalos unitarios de la función f		
	(0, 42)	(97, 117)	(2, 51)
(0, 59)	1	0	1
(32, 119)	0	1	0
(2, 123)	0	0	1

La tabla tiene un cubrimiento que se forma por la primera y la segunda filas. Este cubrimiento engendra la FND tope de la función $f(x_1, x_2, \ldots x_7) = \bar{x}_1 x_5 \vee x_2 x_4$.

Teóricamente, cuando $n \to \infty$, el número de las FND tope de la función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ crece como el número de todas las distintas funciones booleanas de n variables 2^{2^n}. De modo práctico el número de las FND tope aumenta con más lentitud que 2^{2^n} a costa de un gran número de los vértices incompletamente definidos del hipercubo. El sondeo de todas las FND tope de la función booleana f determina la selección de la FND minimal de esta función.

En el ejemplo a examinar existe una FND tope; por consiguiente, es la FND minimal de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_7)$:

$$f(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee \overline{bc},$$

donde $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_4$, $d = x_5$. Contando con esta definición suplementaria, la función depende de cuatro variables.

Una función booleana obtenida de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fijando una i-ésima variable, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, llámase *residual*. Si $x_i = 1$, la función residual se denomina *unitaria*, si $x_i = 0$, *nula*.

La función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ depende *insustancialmente* de la i-ésima variable, si sus funciones residuales respecto a esta variable son iguales.

§ 2.3. Completitud

Cualesquiera enunciación compleja puede representarse en la forma de una expresión que contiene enunciaciones simples (variables) x_i, operaciones de disyunción, conjunción, negación y, tal vez, paréntesis (,). Consideremos qué propiedades deben satisfacer las operaciones por cuyo medio se puede expresar cualquiera enunciación compleja.

Simularemos la conjunción y la disyunción por la conexión en serie y en paralelo, respectivamete, de los elementos clave (para la exactitud: semiconductores), simularemos la negación por la inserción de carga en el

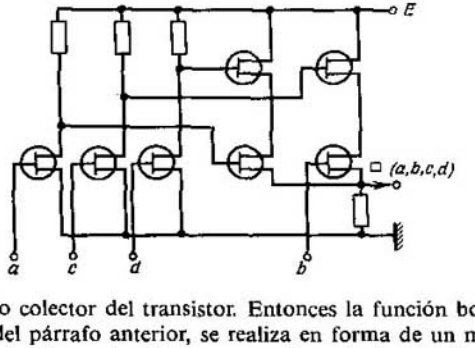


Fig. 2.2

circuito colector del transistor. Entonces la función booleana, obtenida a fines del párrafo anterior, se realiza en forma de un módulo integral con el circuito de sustitución representado en la fig. 2.2. Designemos la operación que se realiza por este elemento mediante □ (a, b, c, d) y consideremos el álgebra de enunciación de tipo $\langle M, \square \rangle$, donde M son las enunciaciones lógicas y $\square(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee \overline{bc}$.

Establezcamos, si se puede representar cualesquiera función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en forma de superposición del sistema $S = \{\square\}$, como lo es posible en el caso del sistema $\{\vee, \&, \bar{}\}$.

Llámase *superposición* del sistema $S = \{\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}), \varphi_2(x_1, \ldots, x_{k_2}), \ldots, \varphi_l(x_1, x_2, \ldots, x_{k_l})$ cualesquiera función f obtenida:

a) de $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k_j})$ cambiando las denominaciones de las variables, $\varphi_j \in S$;

b) sustituyendo algunas variables de una función $\varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{k_\alpha})$ por las funciones $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k_j})$, $\varphi_\alpha, \varphi_j \in S$;

c) aplicando repetidamente los puntos a) y b).

Un sistema S se llama *completa en* P_k, si cualesquiera función f, $f \in P_k$, es representable en forma de superposición de este sistema y se denomina *base*, si la completitud de S se pierde, cuando se elimina, por lo menos, una función, donde P_k es una lógica de k signos.

Expresemos la disyunción y la negación mediante □ (a, b, c, d); entonces, debido a la descomposición de Shannon y la ley propuesta por De Morgan, cualquiera función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ puede expresarse por medio de $S = \{\square\}$:

$\bar{\alpha} = \square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$;

$\alpha \vee \beta = \overline{\overline{\alpha\alpha} \vee \beta\beta} = \square(\bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) =$

$\square(\square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \beta, \square(\beta, \beta, \beta, \beta), \square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha))$.

En el caso general para establecer la competitud de un sistema S de funciones booleanas $f_i(S$ en $P_2)$ se utiliza el criterio de completitud de Post—Yablonski.

Definamos con anticipación cinco clases de funciones booleanas.

Llámase *clase K_0 de funciones booleanas $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que conservan la constante* 0 un conjunto de funciones de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)/f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Se denomina *clase K_1 de funciones booleanas $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que conservan la constante* 1 un conjunto de funciones de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n\}/f_i(1, 1, \ldots, 1) = 1\}.$$

Tomando como ejemplo el sistema $S = \{\square\}$ examinemos los tests de reconocimiento de funciones que poseen estas propiedades:

$\square(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee b\bar{c}$,

$\square(0, 0, 0, 0) = \overline{00} \vee 0\bar{0} = 1 \vee 0 = 1$, $\square(a, b, c, d) \notin K_0$,

$\square(1, 1, 1, 1) = \overline{11} \vee 1\bar{1} = 0 \vee 0 = 0$, $\square(a, b, c, d) \notin K_1$.

Se llama *clase K_l de funciones booleanas lineales $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$* un conjunto de funciones de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)/f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus \sum c_i x_i\},$$

$c_0, c_i = 0, 1; i = 1, 2, \ldots, n;$

donde $\oplus$, $\sum$ son los signos de la operación "adición según el módulo dos":

$$0 \oplus 0 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 0 = 1;\ 1 \oplus 1 = 0.$$

Establezcamos si la función booleana $\square(a, b, c, d)$ es lineal.

Supongamos que ésta es lineal y, por consiguiente, representable en la forma

$$\square(a, b, c, d) = c_0 \oplus c_a a \oplus c_b b \oplus c_c c \oplus c_d d.$$

Hallemos coeficientes incógnitos c_0, c_a, c_b, c_c, c_d, partiendo de la suposición de linealidad de esta función. Fijemos un juego 0000:

$\square(0, 0, 0, 0) = 1$,

$c_0 \oplus c_a 0 \oplus c_b 0 \oplus c_0 0 \oplus c_d 0 = c_0,\ c_0 = 1.$

De manera análoga definamos los coeficientes c_a, c_b, c_c, c_d, fijando respectivamente los juegos 1000, 0100, 0010, 0001. Tenemos:

$\square(1, 0, 0, 0) = \bar{1} \cdot \bar{0} \vee 0 \cdot \bar{0} = 0 \vee 0 = 0.$

$1 \oplus c_a \cdot 1 \oplus c_b \cdot 0 \oplus c_0 0 \oplus c_d \cdot 0 = 1 \oplus c_a,$

$1 \oplus c_a = 0,\ c_a = 1;$

$\square(0, 1, 0, 0) = \bar{0} \cdot \bar{0} \vee 1 \cdot \bar{0} = 1 \vee 1 = 1,$

$1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus c_b \cdot 1 \oplus c_c \cdot 0 \oplus c_d \cdot 0 = 1 \oplus c_b,$

$1 \oplus c_b = 1,\ c_b = 0;$

$\square(0, 0, 1, 0) = \bar{0} \cdot \bar{0} \vee 0 \cdot \bar{1} = 1 \vee 0 = 1.$

$1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 \oplus c_c \cdot 1 \oplus c_d \cdot 0 = 1 \oplus c_c,$

$1 \oplus c_c = 1,\ c_c = 0;$

$\square(0, 0, 0, 1) = \bar{0}\cdot\bar{1} \vee 0\cdot\bar{0} = 0 \vee 0 = 0,$

$1 \oplus 1\cdot 0 \oplus 0\cdot 0 \oplus 0\cdot 0 \oplus c_d\cdot 1 = 0,$

$1 \oplus c_d = 0,\ c_d = 1.$

De modo definitivo obtenemos

$\square(a, b, c, d) = 1 \oplus a \oplus d.$

Esta igualdad no se mantiene en cada uno de los demás 11 puntos. En efecto, en el punto (1, 1, 1, 1) tenemos

$\square(1, 1, 1, 1) = \bar{1}\cdot\bar{1} \vee 1\cdot\bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$

$1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,\ 0 \neq 1.$

Por consiguiente, la suposición hecha es inválida. La función $\square(a, b, c, d)$ es no lineal: $\square(a, b, c, d) \notin K_1$.

Se denomina *clase K_a de funciones booleanas autoduales* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un conjunto de funciones booleanas de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)/f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{f}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)\}.$$

Consideremos la propiedad de autodualidad de la función booleana $\square(a, b, c, d)$. Construyamos una tabla (tabla 2.7) 2×2^n ($n = 4$) que en la primera fila tiene equivalentes decimales correspondientes a los juegos (a, b, c, d), en la segunda, valores de la función $\square(a, b, c, d)$ que corresponden a estos juegos.

Tabla 2.7

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0

Una función es autodual, si sobre cualquier par de juegos *contrarios* (juegos para los cuales la suma de sus equivalentes decimales es igual a $2^n - 1$) la función toma los valores contrarios.

La función $\square(a, b, c, d)$ no es autodual: $\square(7) = \square(8)$.

Se denomina *clase K_m de funciones booleanas monótonas* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un conjunto de funciones booleanas de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*) \geqslant (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\sigma_i^* \geqslant \sigma_i,\ i = 1, 2, \ldots, n) \rightarrow f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*) \geqslant f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\}.$$

Para realizar los tests de monotonía de la función $\square(a, b, c, d)$ construiremos un hipercubo y analizaremos la distribución de valores de esta función en él (fig. 2.3). Si existe al menos una arista, a cuyos fines se les ponen en correspondencia los juegos binarios

$(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ y $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de tipo

$(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*) \geqslant (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, para los cuales

$f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*) < f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, tal función

booleana no es monótona. En otras palabras, en el hipercubo existe por lo menos un 0 que cubre 1.

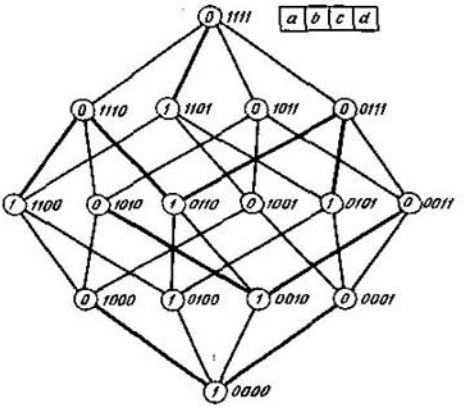


Fig. 2.3

La función booleana a examinar $\square(a, b, c, d)$ no es monótona (fig. 2.3):

$(1, 0, 0, 0) \geqslant (0, 0, 0, 0)$,
$f(1, 0, 0, 0) < f(0, 0, 0, 0)$.

Criterio de completitud. El sistema S de funciones booleanas f_i es completo si, y sólo si, se cumplen cinco condiciones: existen una función $f_i \in S$ que no conserva la constante cero: $f_i \neq K_0$; una función $f_i \in S$ que no conserva la constante unidad $f_i \notin K_1$; una función no lineal, una función no autodual y una función no monótona en el sistema S.

Al usar el criterio de completitud y el método de Petrick en P_2 construiremos las bases posibles con operaciones cero-, mono- y biádica.

Construiremos todas las funciones booleanas de dos variables (tabla 2.8).

Tabla 2.8.

Variables		Funciones booleanas															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

El índice i de una variable funcional f_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 15$, es igual a un juego equivalente decimal de valores de esta función leído de arriba abajo. Señalemos estas funciones booleanas.

La función $f_0(x_1, x_2) = 0$ es la *constante cero.*

La función $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2$ es la *conjunción.*

La función $f_2(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 \rightarrow x_2 = x_1 \nmid x_2$ es la *coimplicación izquierda* (se lee "no si x_1, entonces x_2", el prefijo *co* proviene de la palabra latina *conversus* que significa *inverso*).

La función $f_3(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1$.

La función $f_4(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = x_1 \nmid x_2$ es la *coimplicación derecha.*

La función $f_5(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2$.

La función $f_6(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 = x_1 \oplus x_2$ es la *adición según el módulo dos* o la función *de no equivalencia.*

La función $f_7(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ es la *disyunción.*

La función $f_8(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 \circ x_2$ es la *función de Webb.*

La función $f_9(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1 \circ\!\!-\!\!\circ x_2$ es la función *de equivalencia.*

La función $f_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$ es la *negación*

La función $f_{11}(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$ es la *implicación derecha* (se lee "*si* x_2, *entonces* x_1").

La función $f_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ es *la negación.*

La función $f_{13}(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \rightarrow x_2$ es la *implicación izquierda* (se lee "si x_1, *entonces* x_2").

La función $f_{14}(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 \mid x_2$ es la *función de Sheffer.*

La función $f_{15}(x_1, x_2) = 1$ es la *constante unidad.*

Para engendrar todas las bases en P_2 construiremos una tabla bidimensional (tabla 2.9), a cada fila de la cual le ponemos en correspondencia biunívoca once funciones (no consideramos las funciones $f_3, f_4, f_5, f_{10}, f_{11}$), a cada columna le ponemos en correspondencia una clase: K_0 (K_0 son las funciones que conservan la constante cero), K_1 (K_1 son las funciones que conservan la constante unidad; K_l (K_l son las funciones lineales); K_a (K_a son las funciones autoduales); K_m (K_m son las funciones monótonas) y en la célula (i, j) ponemos 1, si la i-ésima función no pertenece a la j-ésima clase, en caso contrario dejamos la célula (i, j) vacía.

Tabla 2.9

Identificador de la fila	Funciones f_i	Clases				
		K_0	K_1	K_l	K_a	K_m
a	0		1		1	
b	1			1	1	
c	2		1	1	1	1
d	6		1		1	1
e	7			1	1	

Identificador de la fila	Funciones f_i	Clases				
		K_0	K_1	K_l	K_s	K_m
g	8	1	1	1	1	1
k	9	1			1	1
m	12	1	1			1
n	13	1		1	1	1
p	14	1	1	1	1	1
r	15	1			1	

Por medio del método de Petrick, transformando la forma multiplicativo-aditiva en la aditivo-multiplicativa engendramos todos los cubrimientos de las columnas por las filas de esta tabla:

$$(g \vee k \vee m \vee n \vee p \vee r)(a \vee c \vee d \vee g \vee m \vee p)(b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p)\,\&$$
$$\&\,(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee g \vee k \vee n \vee p \vee r)(c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) =$$
$$= (g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd)\,\&$$
$$\&\,(b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p)(c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) =$$
$$= (g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd)\,\&$$
$$\&\,(c \vee g \vee n \vee p \vee bd \vee bk \vee bm \vee ed \vee ek \vee em) =$$
$$= g \vee p \vee abk \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee ake \vee kbd \vee ked \vee$$
$$\vee\, mc \vee mn \vee bm \vee me \vee cr \vee rbd \vee red =$$
$$= g \vee p \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee mc \vee mn \vee bm \vee me \vee$$
$$\vee\, cr \vee abk \vee ake \vee kdb \vee ked \vee rbd \vee red.$$

Cada uno de los cubrimientos obtenidos π_i engendra la base B_i:

$\pi_1 = \{g\} \leftrightarrow B_1 = \{\circ\}$ es la *base de Webb;*

$\pi_2 = \{p\} \leftrightarrow B_2 = \{|\}$ es la *base de Sheffer;*

$\pi_3 = \{k, c\} \leftrightarrow B_3 = \{\dotplus, \infty\}$,

$\pi_4 = \{a, n\} \leftrightarrow B_4 = \{\rightarrow, 0\}$ es la *base implicativa;*

$\pi_5 = \{c, n\} \leftrightarrow B_5 = \{\rightarrow, \dotplus\}$,

$\pi_6 = \{d, n\} \leftrightarrow B_6 = \{\rightarrow, \oplus\}$,

$\pi_7 = \{m, c\} \leftrightarrow B_7 = \{\dotplus, \bar{}\}$ *es la base coimplicativa;*

$\pi_8 = \{m, n\} \leftrightarrow B_8 = \{\rightarrow, \bar{}\}$ es la *base implicativa;*

$\pi_9 = \{b, m\} \leftrightarrow B_9 = \{\&, \bar{}\}$ es la *base conjuntiva de Boole;*

$\pi_{10} = \{m, e\} \leftrightarrow B_{10} = \{\vee, \bar{}\}$ es la *base disyuntiva de Boole;*

$\pi_{11} = \{c, r\} \leftrightarrow B_{11} = \{\dotplus, 1\}$ es la *base coimplicativa;*

$\pi_{12} = \{a, b, k\} \leftrightarrow B_{12} = \{\infty, \&, 0\}$;

$\pi_{13} = \{a, k, e\} \leftrightarrow B_{13} = \{\infty, \vee, 0\}$;

$\pi_{14} = \{k, b, d\} \leftrightarrow B_{14} = \{\oplus, \&, \infty\}$;

$\pi_{15} = \{k, e, d\} \leftrightarrow B_{15} = \{\oplus, \vee, \infty\}$;

$\pi_{16} = \{r, b, d\} \leftrightarrow B_{16} = \{\oplus, \&, 1\}$ es la *base de Zhegalkin;*

$\pi_{17} = \{r, e, d\} \leftrightarrow B_{17} = \{\oplus, \vee, 1\}$.

Quedan obtenidas 17 *bases*, en cada una de las cuales no se puede quitar ninguna función sin perder la completitud en $\mathbf{P}_2$.

En la base $\{\vee, \&, \bar{}\}$ a cualesquiera enunciación compleja le corresponde una enunciación equivalente en cualesquiera de estas bases.

Por ejemplo, en la base implicativa $\{\rightarrow, \bar{}\}$ a la enunciación "no a o b y c" le corresponde la enunciación equivalente "si a, entonces no si b, entonces no c".

$\bar{a} \vee bc = a \rightarrow \overline{bc} = a \rightarrow \overline{\bar{b} \vee \bar{c}} = a \rightarrow \overline{(b \rightarrow \bar{c})}$.

La realización técnica de las funciones básicas puede tener por fundamento el empleo de distintos fenómenos físicos, por ejemplo, la implicación y la coimplicación se basa en los fenómenos magnéticos y las funciones de Sheffer y Webb, en los fenómenos de semiconductores.

De acuerdo con las normas estatales de la URSS 2.473-72, los elementos básicos se representan gráficamente en forma de rectángulos, en los cuales las entradas inversas y la salida se representan como círculos no rayados y se pone encima 1 si la cópula exterior es la "disyunción", y &, si lo es la "conjunción", excepto la adición según el módulo dos (entonces encima se pone **M2**) y la equivalencia (que se designa por ≡) (fig. 2.4, *a*). Los elementos más complejos se representan gráficamente en forma de composiciones de los elementos enumerados a base de la representación

Fig. 2.4

de una función booleana realizable en forma de una FND o una FNCj. Por ejemplo, el elemento examinado antes $\square(a, b, c, d)$ puede ser representado gráficamente en forma de un rectángulo (fig. 2.4, *b*) que corresponde a la FND de la función $\square(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee \overline{bc}$.

§ 2.4. Síntesis de los circuitos lógicos

Examinemos la síntesis de los circuitos lógicos en una base prefijada.

Demos el método de simulación directa de las cópulas $\vee$, $\&$, $^-$ con ayuda de las cópulas de la base prefijada.

1. Para una función booleana prefijada se halla su forma de paréntesis, óptima en el sentido del número de cópulas $\vee$, $\&$, $^-$.

2. Se expresan las cópulas clásicas $\vee$, $\&$, $^-$ en forma de una superposición de la base prefijada.

3. Se ponen los resultados del punto 2 en la expresión obtenida en el punto 1 marcando con trazos en esto las uniones de los bloques que simulan $\vee$, $\&$, $^-$ en la base prefijada.

4. Al analizar las uniones y utilizando la ley de doble negación, se elimina la redundancia del circuito lógico.

Ejemplo 2.3. Sintetizar un circuito lógico que realiza una función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} 1 & \text{sobre } -0-10,\ 10-11,\ 0-101, \\ 0 & \text{sobre } 1-10-,\ 1-001,\ 0-100 \end{cases}$$

en la base $B = \{\rightarrow, 0\}$.

1. Al cubrir las tablas de distinciones (tabla 2.10, hallemos la FND abreviada de una función booleana completamente definida $\tilde{f}$, cuyas regiones unitarias $\tilde{M}_1$ y nula $\tilde{M}_0$ incluyen respectivamente regiones unitaria y nula de la función dada f, $\tilde{f} \supset f$.

La FND abreviada de la función $\tilde{f}$ tiene siguiente forma:

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_5) = x_4 \vee \bar{x}_1 x_5.$$

2. Expresamos las cópulas $\vee$, $\&$, $^-$ por medio de las de una base implicativa:

$$\bar{a} = a \rightarrow 0,$$

$$a \vee b = \bar{\bar{a}} \vee b = \bar{a} \rightarrow b = (a \rightarrow 0) \rightarrow b,$$

$$a \cdot b = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = \overline{a \rightarrow \bar{b}} = \overline{a \rightarrow (b \rightarrow 0)} = (a \rightarrow (b \rightarrow 0)) \rightarrow 0.$$

Tabla 2.10

Intervalos de la región unitaria de la función f		Intervalos de la región nula de la función f		
		1 — 10 —	1 — 001	0 — 100
—	—	0	0	0
$\bar{x}_2$	0	0	0	0
—	—	0	0	0
x_4	1	1	1	1
$\bar{x}_5$	0	0	1	0

Intervalos de la región unitaria de la función f		Intervalos de la región nula de la función f		
		1 — 10 —	1 — 001	0 — 100
x_1	1	0	0	1
x_2	0	0	0	0
—	—	0	0	0
x_4	1	1	1	1
x_5	1	0	0	1
$\bar{x}_1$	0	1	1	0
—	—	0	0	0
x_3	1	0	1	0
$\bar{x}_4$	0	0	0	0
x_5	1	0	0	1

El punto 3 es realizable en forma de un grafo con vértices ponderados, $\rightarrow$, f, x_i, 0 (fig. 2.5, *a*). En la base dada la ley de doble negación puede representarse como en la fig. 2.5, *b*. Eliminando la redundancia, obtenemos el circuito lógico S (fig. 2.5, *c*).

El método descrito de síntesis puede aplicarse con éxito para proyectar circuitos simples.

Examinemos una serie de métodos de proyectar circuitos. La eficiencia de cada uno de ellos aumenta en comparación con los anteriores.

El método de cascadas basado en la descomposición de Shannon

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{\forall(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)} \overset{k}{\underset{i=1}{\&}} x_i^{\sigma} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

permite, al existir los bloques de exclusión de k variables, reducir la realización de una función booleana de n variables a la realización de una función de $n - k$, $k \geqslant 1$, variables. A su vez, la dimensión de funciones residuales $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ puede bajarse a su vez al excluir t variables,

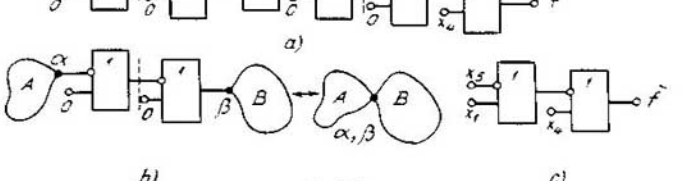


Fig. 2.5

etc., hasta que las funciones residuales tengan la forma simple y su realización no sea difícil en la base prefijada.

La complejidad de funciones residuales depende del grado de exclusión de variables en una función booleana dada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El número de todos los posibles procedimientos de exclusión de variables aumenta de modo combinatorio. Por ejemplo, si utilizamos sólo los bloques que excluyen una misma variable en cada nivel, este número es igual a $n!$. Empero, en todo nivel se puede excluir tanto una misma variable como también distintas; luego, a cada paso se puede excluir diverso número de variables (una, dos, tres, etc.). Escoger una exclusión óptima de variables mediante el sondeo de todos los procedimientos de exclusión es un proceso que requiere trabajo de mucha laboriosidad.

Una exclusión óptima se busca empleando criterios heurísticos uno de los cuales se basa en el empleo de la noción de la derivada de una función booleana.

Derivada de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *de la función booleana f respecto a una variable* x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, x_n) \oplus f(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, x_n), \tag{2.13b}$$

donde $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, x_n)$ es una función residual unitaria; $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, x_n)$ es una función residual nula; aquí y a continuación $\oplus$ es la suma según el módulo dos. Una función residual unitaria se obtiene después de hacer una variable x_i igual a la unidad, una función nula resulta después de hacer x_i igual a cero.

Ejemplo 2.4. Calculemos la derivada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ de la función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee (0, 4, 7)$$

donde 0, 4, 7 son los equivalentes decimales de juegos binarios, sobre los cuales la función f es igual a 1,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Según la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \,\&\, \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \vee$$
$$\vee (\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \vee \overline{x_2x_3}) \,\&\, \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3)(x_2 \vee x_3) \vee$$
$$\vee (x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \,\&\, \bar{x}_2\bar{x}_3 = x_2x_3.$$

Una derivada de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de la función booleana $f(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ determina las condiciones, para las cuales esta función cambia su

valor cuando se conmuta la variable x_i (el valor de x_i se sustituye por su contrario).

En el ejemplo considerado la función $f(x_1, x_2, x_3)$ cambia su valor σ por $\bar{\sigma}(\sigma \to \bar{\sigma})$, $\sigma = 0$, 1, al cambiar el valor de la variable x_1, $\sigma \to \bar{\sigma}$, bajo la condición de que la conjunción x_2x_3 tome el valor de "verdad", o sea, $x_2 = x_3 = 1$.

Se denomina *derivada mixta* $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$ *de la función booleana* f *una expresión de la forma*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_k}} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}}}\right). \tag{2.14}$$

La derivada mixta de orden k $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$ se calcula aplicando la relación (2.13) k veces y fijando las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ (no tiene importancia el orden en que se fijan las variables).

La derivada de orden k $\dfrac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})}$ *de la función booleana* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *respecto a las a variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ determina las condiciones, para las cuales esta función cambia su valor sustituyendo simultáneamente los valores de las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

Según Bochmann, la *derivada de orden* k $\dfrac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})}$ *de la función booleana* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *respecto a las variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ *es igual a la suma según el módulo dos de todas las derivadas de primer orden, de las segundas, las terceras y las k-ésimas derivadas mixtas fijando las variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = \sum_{i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \sum_{i,j;i\neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \oplus \\ \oplus \sum_{\substack{i,j,s \\ i\neq j, i\neq s, j\neq s}} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$$

$$i, j, s, \ldots = i_1, i_2, \ldots i_k. \tag{2.15}$$

Ejemplo 2.5. En un circuito lógico que realiza la función booleana $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$, determinemos las condiciones de conmutación de un canal de salida f cuando se conmuta cada canal de entrada, se conmutan simultáneamente el primer canal y el segundo, y, al mismo tiempo, los tres canales x_1, x_2, x_3.

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \bar{x}_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \oplus x_1\bar{x}_3 = x_1(1 \oplus \bar{x}_3) = x_1x_3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1x_2 \oplus x_1 = x_1(x_2 \oplus 1) = x_1\bar{x}_2.$$

La condición $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$ es la de conmutación del canal de salida f cuando se conmuta el canal de entrada x_1: 1 en caso de alimentación del segundo canal ó 0 en caso del tercero; para la conmutación del primerl canal x_1 de σ a $\bar{\sigma}(\sigma \to \bar{\sigma})$, el canal de salida se conmuta de σ a $\bar{\sigma}(\sigma \to \bar{\sigma}, \sigma = 0,1)$. El canal de salida f se conmuta, $\sigma \to \bar{\sigma}$, cuando se conmuta el canal de entrada x_2, $\sigma \to \bar{\sigma}$, si $x_1 = x_3 = 1$, y f se conmuta $\sigma \to \bar{\sigma}$, cuando se conmuta x_3, $\sigma \to \bar{\sigma}$, para $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $\sigma = 0,1$. Luego hallamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 1 \oplus \bar{x}_3 = x_3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus$$
$$\oplus x_1x_3 \oplus x_3 = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_3(x_1 \oplus 1) =$$
$$= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1x_3 = (x_2 \vee \bar{x}_3) \,\&\, \overline{\bar{x}_1x_3} \vee$$
$$\vee \overline{(x_2 \vee \bar{x}_3)} \,\&\, \bar{x}_1x_3 = (x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee$$
$$\vee \bar{x}_2x_3 \,\&\, \bar{x}_1x_3 = \bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 =$$
$$= \bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2.$$

El canal de salida f se conmuta con cualquiera conmutación simultánea de los canales de entrada x_1, x_2, cuando $x_3 = 0$, e independientemente del estado del canal de entrada x_3, cuando x_1 y x_2 se conmutan de 1,1 a 0,0 o de 0,0 a 1,1. Determinemos

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = x_2 \oplus 1 = \bar{x}_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = x_1,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\right) = 1,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_3} \oplus$$
$$\oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \oplus$$
$$\oplus \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus$$
$$\oplus x_1 \cdot \bar{x}_2 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_2 \oplus x_1 \oplus 1 =$$
$$= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_3(x_1 \oplus 1) \oplus \bar{x}_2(x_1 \oplus 1) \oplus$$
$$\oplus \bar{x}_1 = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 =$$

$$= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_1(\bar{x}_2 \oplus 1) =$$
$$= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_1(\bar{x}_2 \oplus 1) =$$
$$((x_2 \vee \bar{x}_3) \,\&\, \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \,\&\, \bar{x}_1 x_3) \oplus$$
$$\oplus \bar{x}_1 x_2 = ((x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee$$
$$\vee \bar{x}_2 x_3 \,\&\, \bar{x}_1 x_3) \oplus \bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee$$
$$\vee x_1 \bar{x}_2 x_3) \oplus \bar{x}_1 x_2 = (x_3 \vee x_1 x_2 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus \bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \,\&$$
$$\& \bar{x}_1 x_2 \vee (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \,\&\, \bar{x}_1 x_2 =$$
$$= (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \vee$$
$$\vee x_3(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2)\bar{x}_1 x_2 =$$
$$= x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3.$$

Con la conmutación del vector de entrada $4 \leftrightarrow 3$, $6 \leftrightarrow 1$ y $7 \leftrightarrow 0$ se conmuta el canal de salida f

El criterio de exclusión óptima de las variables en el método de cascadas consiste, primero, en la exclusión de variables, con la conmutación de las cuales la función booleana se conmuta con el número máximo de condiciones. Este número máximo se determina por el peso de la derivada.

Llámase *peso de la derivada de la función booleana* el *número de constituyentes de esta derivada.*

Al emplear los bloques que excluyen k variables, se hallan las derivadas de orden k de una función realizable y se busca el valor máximo del peso de la derivada $p\left(\dfrac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})}\right)$, que determina variables para excluir. Para las funciones booleanas residuales obtenidas se vuelve a hallar las derivadas, se determinan los pesos, mientras que la derivada de la función residual a examinar que tiene el peso máximo determina variables correspondientes que en este nivel se excluyen para esta función residual, etc., hasta que las funciones residuales tengan realización simple.

Ejemplo 2.6. Sinteticemos un circuito lógico que realiza la función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee$$
$$\vee x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_5,$$

empleando bloques de exclusión de una variable (fig. 2.6, *a*).

Determinemos la variable x_i, respecto a la cual la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ tiene peso máximo, es decir, la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ depende de ella del modo más esencial.

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2 x_3 \vee x_3 \bar{x}_5 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee x_3 \bar{x}_4 x_5) \oplus$$
$$\oplus (\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5).$$

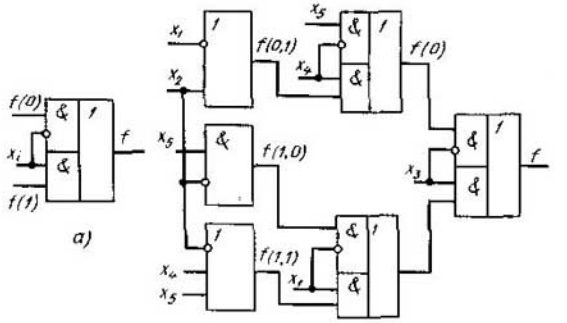


Fig. 2.6

Para calcular el peso de la derivada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ que depende de cuatro variables x_2, x_3, x_4, x_5 representamos un espacio cuadridimensional con las generatrices $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ en forma de un producto cartesiano de dos espacios bidimensionales $\{x_2, x_3\} \times \{x_4, x_5\}$ con las generatrices $\{x_2, x_3\}$ y $\{x_4, x_5\}$, respectivamente. Entonces, la derivada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ puede representarse en forma de una tabla bidimensional: a cada valor de $\sigma_2\sigma_3$ de las variables x_2, x_3 les corresponde biunívocamente una fila de la tabla, a una columna le corresponden los valores de $\sigma_4\sigma_5$ de las variables x_4, x_5. En la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna que corresponde biunívocamente a un punto de un espacio cuadridimensional con las generatrices $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, escribimos el valor de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ en este punto. El peso de la derivada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ es igual al número de unidades en esta tabla (tabla 2.11, *a*).

Tabla 2.11, a

x_2x_3	x_4x_5				x_2x_3	x_4x_5			
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	0	0	1	1	2	0	0	0	0
1	1	0	1	0	3	1	0	1	1

Así, pues, $P\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 7$.

De modo análogo calculemos los pesos de las derivadas

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 2, 3, 4, 5$ (tablas 2.11, *b, c, d, e*).

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee x_1x_4 \vee \vee \bar{x}_3\bar{x}_4x_5) \oplus (x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee x_3x_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4x_5),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_1x_2x_4 \vee \vee \bar{x}_2x_5) \oplus (\bar{x}_1x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_4x_5).$$

Tabla 2.11, b

x_1x_3	x_4x_5			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 5;$$

Tabla 2.11, c

x_1x_2	x_4x_5			
	0	1	2	3
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	0

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 8;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = (x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3x_5) \oplus (x_1\bar{x}_2x_3) \vee \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_2x_3x_5 \vee \bar{x}_3x_5),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = (x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3\bar{x}_4) \oplus \oplus (x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \vee x_1x_3 \vee x_1x_2x_4),$$

Tabla 2.11, d

x_1x_2	x_3x_5			
	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	1

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 5;$$

Tabla 2.11,e

x_1x_2	x_3x_4			
	0	1	2	3
0	1	0	1	1
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	1	0

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_5}\right) = 7.$$

El valor máximo $\max_i P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ se obtiene diferenciando la función f respecto a la variable x_3. Excluyendo esta variable, obtenemos dos funciones residuales: la unitaria $f(x_1, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1)$ y la nula $f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4, x_5) = f(0)$:

$$f(1) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_5.$$

$$f(0) = \bar{x}_1x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_4x_5.$$

De manera análoga determinemos la exclusión óptima de las variables en el siguiente nivel del circuito lógico (tablas 2.12, *a*, *b*, *c*, *d*; tablas 2.13, *a*, *b*, *c*, *d*):

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_1} = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4 \vee \vee \bar{x}_2x_5) \oplus \bar{x}_2x_5,$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_2} = (x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_4 \oplus \oplus (x_3 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_5),$$

Tabla 2.12, a

x_2	x_4x_5			
	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_1}\right) = 5;$$

Tabla 2.12,b

x_1	x_4x_5			
	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_2}\right) = 3;$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_4} = (x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_1x_2 \vee \vee \bar{x}_2x_5) \oplus (x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_5 \vee \bar{x}_2x_5),$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_5} = (x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2) \oplus \oplus (x_1\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_1x_2x_4),$$

Tabla 2.12, c

x_1	x_2x_5			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_4}\right) = 1;$$

Tabla 2.12,d

x_1	x_2x_4			
	0	1	2	3
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_5}\right) = 3.$$

Excluimos la variable x_1 y obtenemos funciones residuales de la forma

$$f(x_1 = 1, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1, 1) = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_5 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_5 \vee x_4,$$

$$f(x_1 = 0, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1, 0) = \bar{x}_2x_5.$$

$$f(0) = \bar{x}_1x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_4x_5 = \bar{x}_1x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_4x_5,$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_1} = (x_2x_4 \vee \bar{x}_4x_5) \oplus \oplus (x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_4x_5),$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_2} = (\bar{x}_1x_4 \vee x_4 \vee \bar{x}_4x_5) \oplus \oplus (\bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_4x_5),$$

Tabla 2.13, a

x_2	x_4x_5			
	0	1	2	3
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_1}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_4} = (\bar{x}_1 x_2) \oplus x_5$$

Tabla 2.13,b

x_1	x_4x_5			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_2}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_5} = (\bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_4 \bar{x}_4) \oplus$$

$$\oplus\ (\bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_4),$$

Tabla 2.13, c

x_1	x_2x_5			
	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_4}\right) = 4;$$

Tabla 2.13,d

x_1	x_2x_4			
	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_5}\right) = 4.$$

Excluimos la variable x_4 y obtenemos funciones residuales de la siguiente forma:

$f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5) = f(0, 1) = \bar{x}_1 \vee x_2$.
$f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5) = f(0, 0) = x_5$.

Como resultado obtenemos el circuito lógico que realiza la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ (fig. 2.6, *b*).

El criterio de exclusión óptima de variables tiene carácter heurístico, lo que se basa en la siguiente suposición: cuanto mayor es el peso de una derivada $P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, tanto más la función f depende de la variable x_i. Si existen bloques de exclusión de k variables, la construcción del circuito se realiza de modo análogo, calculando el peso de las derivadas de orden k $P\left(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})}\right)$.

En la matemática discreta no existe el concepto de límite. Sin embargo, en las expresiones (2.13) . . . (2.15) se usa el término "derivada". Esto se

vincula con la descomposición de una función booleana en una serie, análoga a la serie de Maclaurin en el punto 00 . . . 0 o a la serie de Taylor en un punto arbitrario del espacio. Examinemos las descomposiciones dadas en la funcion booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dos funciones f_α y f_β se denominan *mutuamente ortogonales* si su conjunción es igual a 0: $f_\alpha \& f_\beta = 0$.

La expresión (2.11) equivale a la igualdad

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(\forall(\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n)) \\ (f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1)}} \&_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}, \tag{2.16}$$

puesto que $\alpha \vee \beta = \alpha \oplus \beta \oplus \alpha\beta$ y las constituyentes de la unidad de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son mutuamente ortogonales dos a dos.

En la expresión (2.16) en cada constituyente sustituyamos $\bar{x}_i$ por $(x_i \oplus 1)$. Aplicando las siguientes identidades:

de conmutatividad

$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$;

de asociatividad

$\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$;

de distributividad de la conjunción respecto a la adición según el módulo dos

$$\alpha \& (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \& \beta) \oplus (\alpha \& \gamma); \tag{2.17}$$

de operación con constantes

$\alpha \oplus \alpha = 0$, $\alpha \oplus 1 = \bar{\alpha}$, $\alpha \oplus 0 = \alpha$, $\alpha \oplus \bar{\alpha} = 1$,

obtenemos una representación de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \oplus \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^{n} f_{ij} x_i x_j \oplus$$

$$\oplus \ldots \oplus \sum_{\substack{i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, \ldots, i_{k-1} \neq i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}}}^{n} f_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus \ldots \oplus \tag{2.18}$$

$$\oplus f_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

$f_0, f_i, f_{ij}, \ldots, f_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots, f_{12\ldots n} = 0,1.$

La expresión (2.18) se llama *polinomio de Zhegalkin de la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Diferenciemos sucesivamente el polinomio de Zhegalkin de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecto a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y determinemos

el valor de esta derivada en el punto 00 . . . 0. Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial(f \oplus \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \oplus \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2.19}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathop{\&}_{j=1}^{n} x_j\right) = \mathop{\&}_{j=1, j\neq i}^{n} x_j, \tag{2.20}$$

después de la diferenciación respecto a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ obtenemos que

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k}\right|_{00\ldots0} = f_{12\ldots k}.$$

En efecto, después de diferenciar respecto a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$, en la expresión (2.18), todos los términos de la descomposición hasta $f_{12\ldots k}$ se anulan y, como resultado de la sustitución $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$, los demás términos de esta descomposición, excepto a $f_{12\ldots k}$, también serán iguales a 0. De aquí obtenemos el teorema de descomposición de cualesquiera función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto 00 . . . 0.

Teorema 2.2. *Cualquiera función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ puede representarse por su valor en el punto 00 . . . 0 y los valores de todas las derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}, \quad i, j (i \neq j), \ldots = 1, 2, \ldots, n,$$

en este punto en la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(0, 0, \ldots, 0) \oplus$$

$$\oplus \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{00\ldots0} \& x_i \oplus \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{00\ldots0} \&$$

$$\& x_i x_j \oplus \ldots \oplus \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 \neq i_2, \ldots, i_{k-1} \neq i_k}}^{n} \left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}\right|_{00\ldots0} \&$$

$$\& x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus \ldots \oplus$$

$$\oplus \left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right|_{00\ldots0} \& x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{2.21}$$

Para obtener la descomposición de una función booleana en la serie, análoga a la serie de Taylor, en el punto $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ introduzcamos nuevas coordenadas $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, donde $x_i' = x_i \oplus \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, en las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el punto $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ corresponderá al

punto 00 . . . 0 en las coordenadas $x_1', x_2', \ldots, x_n'$. Empleando la descomposición (2.21) de una función booleana en el punto 00 . . . 0 en las coordenadas $x_1', x_2' \ldots x_n'$ y sustituyendo cada variable x_i' por $x_i \oplus \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos el teorema de descomposición de la función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$.

Teorema 2.3. *Cualquiera función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determina por su valor en el punto $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ y los valores de todas sus derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}, \quad i, j (i \neq j), \quad \ldots = 1, 2, \ldots, n,$$

en este punto según la expresión

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \oplus$$

$$\oplus \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \& (x_i \oplus \sigma_i) \oplus \tag{2.22}$$

$$\oplus \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \& (x_i \oplus \sigma_i)(x_j \oplus \sigma_j) \oplus$$

$$\oplus \ldots \oplus \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots, i_{k-1} \neq i_k}}^{n} \left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}\right|_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \&_{j=1}^{k} (x_{i_j} \oplus \sigma_{i_j}) \oplus$$

$$\oplus \ldots \oplus \left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right|_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \&_{i=1}^{n} (x_i \oplus \sigma_i).$$

§ 2.5. Cálculo de las enunciaciones

El cálculo de enunciaciones como una teoría formal se puede definir con ayuda del método axiomático.

Una teoría axiomática (formal) T se considera determinada, si se cumplen las siguientes condiciones:

1) está prefijado un *conjunto numerable*, es decir, un conjunto, cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca a los elementos de la serie natural 1, 2, . . . de símbolos, o sea de los símbolos de la teoría *T*. Sucesiones finitas de los símbolos de la teoría se llaman *expresiones* de la teoría *T*;

2) existe un subconjunto de expresiones de la teoría *T* llamadas *fórmulas de la teoría T* (a menudo se denominan fórmulas de la teoría T *las fórmulas construidas correctamente).* Para determinar, si una expresión es la fórmula en la teoría *T* existe un procedimiento eficaz;

3) está formado cierto conjunto de fórmulas denominadas *axiomas de la teoría T;*

4) existe un conjunto finito $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de relaciones entre las fórmulas, llamadas *reglas de deducción.* Para cada R_i existe un j natural tal que para cualquier conjunto compuesto de j fórmulas y para cualquier fórmula F se resuelve eficientemente el problema de si están j fórmulas dadas en la relación R_i con la fórmula F y, en caso de "sí", F se denomina *consecuencia inmediata de j fórmulas dadas según la regla* R_i.

Llámase *deducción en T* cualquiera sucesión $F_1, F_2, \ldots, F_m$ de fórmulas tal que para cualquier i, la fórmula F_i es ora un axioma de la teoría T, ora consecuencia inmediata de algunas fórmulas anteriores.

La fórmula F de la teoría T se denomina *teorema de la teoría T,* si en T existe una deducción tal que, en ella, F es la última fórmula; esta deducción se llama *deducción de la fórmula F.* En caso general puede ser que no exista ningún procedimiento eficaz, con cuya ayuda se pueda determinar por la fórmula dada, si existe su deducción en la teoría T.

Una fórmula, para la cual existe tal procedimiento se denomina *resoluble* en esta teoría, en caso contrario, *irresoluble.* En otras palabras, para las fórmulas irresolubles no se puede construir un algoritmo para dilucidar la propiedad de esta fórmula de ser teorema. Para esto se necesitan cada vez más nuevos ingenios (inventos) que no pueden ser formalizados.

Al utilizar el concepto de la teoría axiomática T definamos el cálculo de enunciados en la base disyuntiva de Boole.

1. Los símbolos de T son $\vee$, $^-$, (,) y las letras m_i con los números positivos como índices: $m_1, m_2, \ldots$. Los símbolos $\vee$, $^-$ se denominan *cópulas* y las letras m_i, *letras proposicionales.*

2. a) Todas las letras proposicionales son fórmulas;

b) si A y B son fórmulas, entonces $(A \vee B)$ y $(\overline{A})$ son también fórmulas;

c) una expresión es *fórmula* si, y sólo si, se puede establecerlo empleando los puntos a) y b).

De este modo, cualquier *fórmula del cálculo de enunciaciones* es una forma proposicional construida de letras proposicionales con ayuda de las cópulas $\vee$ y $^-$.

3. Cualesquiera que sean fórmulas A, B, C de la teoría T, las siguientes fórmulas son *axiomas de T:*

$A \vee A \to A$, $A \vee B \to B \vee A$,

$A \to A \vee B$, $(B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C)$,

donde la denotación $\alpha \to \beta$ es equivalente a la denotación $\overline{\alpha} \vee \beta$.

4. Reglas de deducción del cálculo de enunciados son:

regla de sustitución (si α es una fórmula deducible y en vez de cualquier variable por doquier en esta fórmula se realiza una sustitución de cualquier fórmula, nueva fórmula es también deducible);

regla de conclusión (si $\alpha \to \beta$ y α son fórmulas deducibles, β es también una fórmula deducible) es la regla modus ponens. Simbólicamente esta regla se denota así: $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$

Por ejemplo, si los enunciados A y $A \to (q \to A)$ son verdaderos, el enunciado $q \to A$ es también verdadero en virtud de la regla de conclusión.

De manera análoga se puede definir otras álgebras booleanas: *álgebra de Webb* $A = \langle M, \circ \rangle$;

álgebra de Sheffer $A = \langle M, | \rangle$;

álgebra implicativa $A = \langle M, \to, 0 \rangle$;

álgebra coimplicativa $A = \langle M, \to, 1 \rangle$;

álgebra de Zhegalkin $A = \langle M, \&, \oplus, 1 \rangle$.

La generalización de lógicas de dos signos son lógicas de signos finitos.

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que aplica un cortejo n-dimensional de k signos $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en el conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ se denomina *función de una lógica de k signos*. Prefijaremos una función de una lógica de k signos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ empleando una tabla de veracidad (tabla unidimensional) que tiene k^n filas o bien una tabla bidimensional que tiene k^n células.

Examinemos una función de tres signos, función de Webb, prefijada por las tablas 2.14, *a* y *b*.

Tabla 2.14, a

x_a	x_b	y
0	0	1
0	1	2
0	2	0
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Tabla 2.14,b

x_a	x_b		
	0	1	2
0	1	2	0
1	2	2	0
2	0	0	0

La función de Webb

$$y = x_a \circ x_b = \max(x_a, x_b) + 1 (\mathrm{mod}\, k)$$

es completa en una lógica de signos finitos. Por lo tanto, el *álgebra de Webb* de signos finitos

$$A_W = \langle M, \circ \rangle,\ M = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\},$$

determina una lógica correspondiente de k signos.

A menudo se encuentran otras álgebras de k signos que se determinan por:

el álgebra de Post

$A_P = \langle M, \vee, \sim \rangle$, $M = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$,

donde $x_a \vee x_b = \max(x_a, x_b)$ es la *disyunción;*

$\bar{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\, k)$ es el *ciclo;*

el álgebra de Rosser y Turquette

$A_{RT} = \langle M, \vee, \&, j_i, i \rangle$

$M = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

donde $x_a \& x_b = \min(x_a, x_b)$ es la *conjunción,*

$$j_i(x) = \begin{cases} k-1 & \text{cuando } x = i \\ 0 & \text{cuando } x \neq i \end{cases}$$ son *funciones características,*

$i = 0, 1, \ldots, k-1$.

La signatura de toda álgebra debe ser completa, independiente y no contradictoria. La signatura es *completa,* si cualquier otra fórmula puede representarse en forma proposicional con ayuda de sus elementos.

La signatura se denomina *independiente,* si no tiene elemento que se deduce empleando reglas de deducción de otros elementos de la signatura.

La signatura se llama *no contradictoria,* si no tiene ninguna fórmula F, válida simultáneamente con la fórmula $\overline{F}$.

Las lógicas de signos finitos son la generalización de las lógicas de dos signos. Por ejemplo, la lógica de Post $\langle M, \vee, \bar{} \rangle$ generaliza la lógica de Boole $\langle M, \vee, \bar{} \rangle$.

Al minimizar las funciones lógicas de las lógicas de signos finitos se puede utilizar los resultados de la lógica de dos signos, es decir, la teoría de la FND de funciones booleanas. Para esto introduzcamos una variable booleana x_α^i, igual a 1 cuando $x_\alpha = i$ y a 0 en caso contrario, $x_\alpha \neq i$. Denominaremos a x_α^i *de la fase i-ésima de la variable* x_α, $x_\alpha = \{0, 1, \ldots, k-1\}$:

$$x_\alpha^i = \begin{cases} 1 \text{ cuando } x_\alpha = i, \\ 0 \text{ cuando } x_\alpha \neq i. \end{cases}$$

La negación de la i-ésima fase es igual a la disyunción de las demás fases de esta variable

$$\bar{x}_\alpha^i = \bigvee_{j=0, j \neq i}^{k-1} x_\alpha^j.$$

Es obvio que

$$x_\alpha^0 \vee x_\alpha^1 \vee \ldots \vee x_\alpha^{k-1} = 1. \qquad (2.23)$$

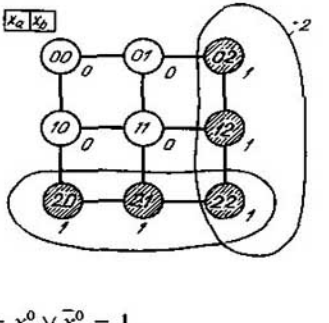


Fig. 2.7

En efecto

$$x_\alpha^0 \vee (x_\alpha^1 \vee x_\alpha^2 \vee \ldots \vee x_\alpha{}^{k-1}) = x_\alpha^0 \vee \bar{x}_\alpha^0 = 1.$$

Consideremos la minimización de la función de tres signos de Webb prefijada por la tabla 2.14:

$$y = x_a \circ x_b,$$

$$y^0 = x_a^0 x_b^2 \vee x_a^1 x_b^2 \vee x_a^2 x_b^0 \vee x_a^2 x_b^1 \vee x_a^2 x_b^2.$$

De acuerdo con la leyes conmutativa, idempotente, asociativa y distributiva tenemos

$$y^0 = (x_a^0 \vee x_a^1 \vee x_a^2) x_b^2 \vee x_a^2 (x_b^0 \vee x_b^1 \vee x_b^2) =$$

$$= 1 \cdot x_b^2 \vee x_a^2 \cdot 1 = x_a^2 \vee x_b^2.$$

Se puede obtener este mismo resultado comparando las ternas de conjunción para determinar la veracidad de la expresión (2.23) después de aplicar la ley distributiva (fig. 2.7). Cada conjunción corresponde a un intervalo maximal, es decir a la arista. Construyendo y cubriendo una tabla de Quine (tabla 2.15) enterémonos, si se puede minimizar la complejidad obtenida de la función.

Tabla 2.15

Intervalos maximales	Intervalos				
	02	12	20	21	22
2 —	1	1	1	1	1
— 2					1

Tenemos un cubrimiento $\pi = \{2-, -2\}$ al que corresponde una FND minimal de la fase nula de la función de tres signos de Webb:

$$y^0 = x_a^2 \vee x_b^2.$$

Análogamente obtenemos formas minimales para la primera y la segunda fases de la función $y = x_a \circ x_b$;

$$y^1 = x_a^0 x_b^0,$$
$$y^2 = x_a^0 x_b^1 \vee x_a^1 x_b^0 \vee x_a^1 x_b^1.$$

De este modo, la minimización de una función de la lógica de k signos se reduce a la minimización de un sistema compuesto de k funciones booleanas, cada una de las cuales determina una fase respectiva de esta función.

Al minimizar las funciones lógicas $\{f_i\}$ disminuye el coeficiente de conexidad del mografo correspondiente $G^M(\{f_i\})$. Se llama *coeficiente de conexidad de un grafo* $s(G)$ la relación de la potencia de la signatura a la potencia del portador de este grafo. El coeficiente de conexidad de un mografo se define como coeficiente de conexidad del grafo obtenido después de quitar su modelización.

La función de Webb no minimizada se determina por un modelo de la forma

$$\Psi_1 = \langle M, S_3 \rangle,$$
$$M = \{x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_b^0, x_b^1, x_b^2, y^0, y^1, y^2\},$$
$$S_3 = \{\underbrace{\{x_a^0, x_b^0, y^1\}}_{1}, \underbrace{\{x_a^0, x_b^1, y^2\}}_{2}, \underbrace{\{x_a^0, x_b^2, y^0\}}_{3},$$
$$\underbrace{\{x_a^1, x_b^0, y^2\}}_{4}, \underbrace{\{x_a^1, x_b^1, y^2\}}_{5}, \underbrace{\{x_a^1, x_b^2, y^0\}}_{6},$$
$$\underbrace{\{x_a^2, x_b^0, y^0\}}_{7}, \underbrace{\{x_a^2, x_b^1, y^0\}}_{8}, \underbrace{\{x_a^2, x_b^2, y^0\}}_{9}$$

El mografo G_1^M determinado mediante este modelo se representa en la fig. 2.8, *a*. Su coeficiente de conexidad $S(G_1^M)$ es igual a $2\frac{1}{3}$:

$$S(G_1^M) = \frac{2 + 6 + 6 + 4 + 5 + 5 + 6 + 4 + 4}{2 \cdot 9} = 2\frac{1}{3}.$$

Después de la minimización esta función corresponde a un modelo Ψ_2 de la forma

$$\Psi_2 = \langle M, S_2, S_3 \rangle,$$
$$M = \{x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_b^0, x_b^1, x_b^2, y^0, y^1, y^2\},$$
$$S_2 = \{\underbrace{\{x_a^2, y^0\}}_{1}, \underbrace{\{x_b^2, y^0\}}_{2}\},$$
$$S_3 = \{\underbrace{\{x_a^0, x_b^0, y^1\}}_{3}, \underbrace{\{x_a^0, x_b^1, y^2\}}_{4},$$
$$\underbrace{\{x_a^1, x_b^1, y^2\}}_{5}, \underbrace{\{x_a^1, x_b^0, y^2\}}_{6}\}.$$

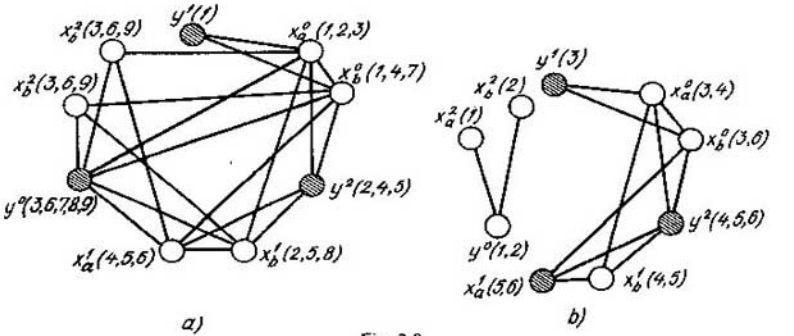


Fig. 2.8

El mografo G_2^M determinado por el modelo Ψ_2 se representa en la fig. 2.8, *b*. Después de la minimización su coeficiente de conexidad disminuirá más de dos veces:

$$S(G_2^M) = \frac{2+4+4+4+3+3+2+1+1}{2 \cdot 9} = 1\frac{1}{3}.$$

Nota. En la fig. 2.8 los vértices correspondientes a las fases de la función están rayados; los vértices correspondientes a las fases de argumentos no están rayados.

El coeficiente de conexidad de un grafo se determina como suma de los números de aristas, incidentes a los vértices del grafo, dividida por el número duplicado de sus vértices.

§ 2.6. Cálculo de los predicados

No basta utilizar el cálculo de enunciaciones para expresar razonamientos lógicos más complicados. En esencial, una lógica de k signos permite determinar, si existe o no una u otra propiedad sobre un conjunto finito de elementos. En el caso de conjuntos infinitos, para establecer una propiedad determinada de un concepto abstracto considerado, es necesario introducir funciones, cuyos argumentos recorren el número infinito de valores en el conjunto M. La función P que toma uno de los valores, 0 ó 1, y cuyos argumentos recorren valores del conjunto arbitrario M se denomina *predicado P en el campo-objeto M*. El número de argumentos del predicado $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ se denomina su *orden*.

El predicado $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ determina una relación n-aria R en M: si $P(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 1$, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ están en una relación R determinada por este predicado y si $P(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$, estos elementos no están en la relación R, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \notin R$.

Para simplificar la estructura de razonamientos lógicos complicados introduzcamos designaciones especiales para unas expresiones que se en-

cuentran a menudo. Acordemos designar la expresión "para cualquier elemento $x \in M$ la propiedad R está cumplida" mediante $(\forall x \in M)(R(x) = 1)$ y la expresión "existe por lo menos un elemento $x \in M$ que posee la propiedad R" mediante $(\exists x \in M)\ (R(x) = 1)$. En las expresiones $(\forall x \in M)(R(x) = 1)$ y $(\exists x \in M)(R(x) = 1)$ las designaciones $\forall x$ y $\exists x$ se denominarán *cuantificador universal* y *cuantificador existencial*, respectivamente.

Definamos inductivamente la fórmula del cálculo de predicados de modo análogo a la definición de la fórmula del cálculo de enunciaciones. Utilizaremos comas, paréntesis, símbolos del cálculo de enunciaciones, variables-objetos $x_1, x_2, \ldots$ (variables que toman valores de un campo-objeto), constantes-objetos, $a_1, a_2, \ldots$, letras de predicado $P_1, P_2, \ldots$ y letras funcionales $f_1, f_2, \ldots$.

Definamos conceptos de las termas de la fórmula elemental.

La definición de la *terma* es la siguiente:

1. Toda variable-objeto o constante-objeto es terma.

2. Si f es una letra funcional y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ son las termas, $f(\eta_1, \ldots, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ es la terma.

3. Una expresión es la terma solamente en el caso cuando eso se desprende de las reglas 1 y 2.

Si P es una letra de predicado y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ son las termas, $P(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ es una fórmula elemental.

La definición de la *fórmula:*

1. Cualquier fórmula elemental es la fórmula.

2. Si A y B son fórmulas y x es una variable-objeto, cada una de las expresiones $A \circ B$ ($\circ$ es la cópula del cálculo de enunciaciones) y $(\forall x \in M)(A(x))$ es la fórmula.

3. Una expresión es la fórmula en el caso, y sólo en el, cuando esto se desprende de las reglas 1 y 2.

En la expresión $(\forall x \in M)\ (A(x))$ la fórmula $A(x)$ se denomina campo de actuación del cuantificador $\forall x$.

Una *variable-objeto* que forma parte de una fórmula llámase *libre*, si no sigue directamente a un cuantificador y no entra en el campo de actuación del cuantificador respecto a esta variable. Todas las demás variables que integran la fórmula se llaman *conexas*. En el límite cualquier fórmula sin variables libres (fórmula cerrada) es una enunciación, verdadera o falsa, y cualquier fórmula con variables libres prefija una relación en el campo-objeto, a veces llamado *campo de interpretación*. Esta relación puede ser verdadera o falsa dependiendo de los valores de variables libres.

En la definición de la fórmula entre los símbolos principales no hay signo $\exists$ para el cuantificador existencial, puesto que se puede definirlo como la denotación abreviada para $\forall x(A(x))$.

El cuantificador universal puede considerarse como generalización de la conjunción. Si el campo-objeto es finito y comprende elementos m_1, m_2, . . ., m_n, la fórmula $(\forall x)(F(x))$ equivale a la conjunción $F(m_1) \,\&\, F(m_2) \,\&\, \ldots \,\&\, F(m_n)$ y el cuantificador existencial $(\exists x)$ puede considerarse como generalización de la disyunción con ello las denotaciones $(\exists x)(F(x))$ $F(m_1) \vee F(m_2) \vee \ldots \vee F(m_n)$ son equivalentes.

Para los campos-objetos infinitos, los cuantificadores interpretan el papel de disyunciones y conjunciones infinitas.

En el cálculo de predicados, cada fórmula $F(P_1, P_2, \ldots, P_m, x_1, \ldots, x_2, \ldots x_n)$ prefija un operador que procesa un sistema de predicados $P_1, P_2, \ldots, P_m$ en el predicado P_α de argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde todas estas variables en la fórmula son libres. Dos fórmulas $F_a(P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $F_b(P_1, P_2, \ldots, P_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que prefijan el mismo operador que procesa el sistema de predicados $P_1, P_2, \ldots, P_m$ en el predicado $P_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las denominaremos *equivalentes* y designaremos $F_a = F_b$.

Igual que en el cálculo de enunciaciones, denominaremos *transformación idéntica* el paso de la fórmula F a su forma equivalente.

A base de los conceptos introducidos, pueden ser demostrados los siguientes cuatro grupos de identidades:

de dualidad

$$(\exists x)(P(x)) = \overline{(\forall x)(\overline{P(x)})},\ (\forall x)(P(x)) = \overline{(\exists x)(\overline{P(x)})};$$

para *π-operaciones* (de conjunción y de cuantificador universal)

$$(\forall x)(F_a(x) \wedge F_b(x)) = (\forall x)(F_a(x)) \wedge (\forall x)F_b(x)),$$
$$(\forall x)(\forall y)(F(x, y)) = (\forall y)(\forall x)(F(x, y));$$

para *σ-operaciones* (de disyunción y de cuantificador existencial)

$$(\exists x)(F_a(x) \vee F_b(x)) = (\exists x)(F_a(x)) \vee (\exists x)(F_b(x)),$$
$$(\exists x)(\exists y)(F(x, y) = (\exists y)(\exists x)(F(x, y));$$

de *sacamiento de la constante*

$$(\Sigma x)(F_a \circ F_b(x)) = F_a \circ (\Sigma x)(F_b(x)),$$

donde $(\Sigma x) = (\exists x)$, $(\forall x)$; $\circ = \vee, \wedge$; F_a es una subfórmula que no contiene variable-objeto conexa x llamada a continuación *constante respecto al cuantificador* (Σx).

Para sacar una constante del campo de definición del cuantificador existencial una expresión subcuantificadora se reduce de antemano a la forma de disyunción de conjunciones; para sacar una constante del campo de definición del cuantificador universal la expresión se reduce a la forma de conjunción.

Por ejemplo, examinemos el sacamiento de una constante $G(y)$ en la fórmula

$$(\forall x)((F(x) \to G(y)) \vee (H(x) \circ G(y))) = (\forall x)(F(x) \wedge \overline{G(y)} \vee \overline{H(x) \vee G(y)}) =$$
$$= (\forall x)(F(x) \wedge G(y) \vee \overline{H(x)} \wedge G(y)) = (\forall x)(\overline{G(y)} \wedge (\overline{H(x)} \vee F(x))) =$$
$$= (\forall x)(\overline{G(y)} \wedge (H(x) \to F(x))) = \overline{G(y)} \wedge (\forall x)(H(x) \to F(x)).$$

En el cálculo examinado, los cuantificadores se aplican solamente respecto a las variables-objetos. El lenguaje será más expresivo, si junto a los cuantificadores respecto a las variables-objetos se utilizan los *cuantificadores respecto a las variables de predicado.*

El cálculo con la aplicación solamente de los cuantificadores respecto a las variables-objetos se denomina *cálculo estrecho de predicados* al que se puede transformar en el *cálculo extendido de predicados,* añadiendo los cuantificadores según las variables de predicado.

La definición de la fórmula en el cálculo extendido de predicados es análoga a su definición en el cálculo estrecho. La diferencia consiste en que, en el punto 2 de la definición de la fórmula, la variable x puede ser tanto la variable-objeto como también la de predicado. Las identidades de dualidad, de π- y σ-operaciones y de sacamiento de una constante son válidas también en el cálculo extendido de predicados.

Examinemos el problema de deducibilidad en el cálculo de predicados. Extendamos el sistema de axiomas de un cálculo de enunciaciones incluido en el cálculo estrecho de predicados, mediante los axiomas siguientes:

$$(\forall x)(G(x) \to G(y)); \quad H(y) \to (\exists x)H(x).$$

El sentido de estos axiomas es siguiente: si el predicado $G(x)$ es verdadero para cualquier x, es verdadero también para cualquier y; si el predicado $H(y)$ es verdadero para cualquier y, existe un x tal que $H(x)$ es verdadero.

En el cálculo estrecho de predicados dos reglas de deducción (de sustitución y de conclusión) del cálculo de enunciaciones se completan con otras tres reglas:

1) *regla para* $\forall$ (si $\varphi_1 \to \varphi_2$ se deduce, φ_1 no contiene x como variable libre y φ_2, sí la contiene en esta forma, entonces la fórmula $\varphi_1 \to \forall(x)\varphi_2$ también se deduce);

2) *regla para* $\exists$ (si $\varphi_1 \to \varphi_2$ se deduce y x se contiene como variable libre en φ_1, mas no se contiene en forma de variable libre en φ_2, entonces la fórmula $\exists(x)\varphi_1 \to \varphi_2$ también se deduce);

3) *regla de redenominación de variables conexas* (si una fórmula φ_1 se deduce y en φ_1 existe ora el cuantificador universal ora el existencial, en φ_1 una variable conexa puede ser sustituida por otra igual simultáneamente en todos los campos de actuación del cuantificador y en el mismo cuantificador. La fórmula obtenida también se deduce).

§ 2.7. Problemas y ejercicios

2.1. Demostrar que el número de todas las funciones booleanas de n argumentos es igual a 2^{2^n}.

2.2. Escribir la función booleana $y = f(x_1, x_2, x_3)$, que toma el valor 1 sobre los juegos con los números 3, 4, 7, en las FND y FNCj perfectas.

2.3. Anotar la función booleana $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, que toma el valor 0 sobre los juegos con los números 2, 6, 7, 8, 11 y 12, en las FND y FNCj perfectas.

2.4. Verificar la validez de la igualdad $x = \bar{x} \oplus 1$.

2.5. Verificar la validez de las siguientes igualdades:

$\overline{x_1 x_2} = x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$, $x_1 | x_2 = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$.

2.6. Demostrar que el número de funciones booleanas que dependen esencialmente de n argumentos se determina por la relación recurrente

$$A_n = 2^{2^n} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot A_i,$$

donde A_i es el número de funciones booleanas que dependen de i argumentos.

2.7. La función booleana f dependiente de tres argumentos se denomina *mayoritaria*, si tiene lugar la igualdad $f = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Designaremos esta operación mediante el signo $\#$ y escribiremos $x_1 \# x_2 \# x_3$. Demostrar que tienen lugar las siguientes relaciones:

1) $x_1 \# x_1 \# x_2 = x_1$;

2) $x_1 \# \bar{x}_1 \# x_2 = x_2$;

3) $\overline{x_1 \# x_2 \# x_3} = \bar{x}_1 \# \bar{x}_2 \# \bar{x}_3$.

2.8. Hallar la FND mínimal (FNDM) de la función $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ que toma el valor 1 sobre los juegos 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 12 y 13.

2.9. Hallar la FNDM de la función $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que toma el valor 1 sobre los juegos con los números de 0 a 7, de 11 a 21, de 26 a 31.

2.10. La función $y = f(x_1, x_2, x_3)$ es igual a 1 sobre los juegos 1, 3, 4 y no es determinada sobre el juego con el número 5. Hallar su FNDM.

2.11. Elaborar un test de reconocimiento de la representación contradictoria de una función booleana incompletamente definida $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (una función está prefijada contradictoriamente, si $(\exists X)(f(X) = 0, 1)$).

2.12. Hallar la FNDM de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = \begin{cases} 1 \text{ sobre } 01 - 0 -,\ 001 - 0,\ -010-, \\ 0 \text{ sobre } 110 - 1,\ 000 - 1,\ 1001 -. \end{cases}$$

2.13. Determinar la forma con paréntesis de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = \begin{cases} 1 \text{ sobre } -0 - 100,\ 100 - 01,\ 01 - - - 1, \\ 0 \text{ sobre } 110 - 0 -,\ 011 - - - 0,\ 00 - 1 - 1. \end{cases}$$

2.14. Hallar la potencia de la región unitaria de la función booleana incompletamente definida $f(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ después de su definición completa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = \begin{cases} 1 \text{ sobre } 001 - 1,\ 01 - 01,\ 1011 -, \\ 0 \text{ sobre } 0001 -,\ 100 - 1,\ 11 - 011. \end{cases}$$

La funcional de la calidad de definición completa es el número mínimal de las termas primarias en la FND equivalente de la función f.

2.15. Verificar la linealidad de la función booleana
$f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee (0, 1, 5, 6)$.

2.16. Establecer, si la función de equivalencia es autodual.

2.17. Verificar la monotonía de la conjunción de n argumentos.

2.18. Poner un ejemplo de una función monótona que sea simultáneamente lineal.

2.19. Poner un ejemplo de una función autodual que sea simultáneamente lineal.

2.20. Poner un ejemplo de una función lineal y monótona.

2.21. Cerciorarse que las funciones de Sheffer y de Webb no son lineales, ni monótonas, ni autoduales.

2.22. Establecer, si la función booleana $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee (0, 3, 7, 11, 13)$ forma base en P_2.

2.23. ¿Es válida la afirmación: si una función booleana depende esencialmente de más que un argumento y es monótona, ésta no es autodual?

2.24. ¿Es válida la afirmación: si una función booleana depende (esencialmente) de más que un elemento y es lineal, ésta no es monótona?

2.25. Hallar todas las funciones booleanas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:
$\varphi(x) \to 1 = \varphi(\bar{x})$, $\varphi(x)\varphi(\bar{x}) = 0$.

2.26. Demostrar el siguiente teorema: con la superposición (sustitución de una función a otra en vez de sus argumentos) de las funciones lineales resultan funciones lineales.

2.27. Demostrar el teorema: con la superposición de funciones autoduales vuelven a resultar funciones autoduales.

2.28. Demostrar el teorema: con la superposición de funciones monótonas vuelven a resultar funciones monótonas.

2.29. Una función se denomina *conservadora de una constante* $r(r = 0,1)$, si sobre un juego de argumentos de tipo $\langle r, r, \ldots, r\rangle$ toma el valor r. Demostrar que la superposición de funciones conservadoras de la constante r es, otra vez, una función que conserva esta constante.

2.30. ¿Son autoduales $\varphi_1 \vee \varphi_2$ y $\varphi_1\varphi_2$, si φ_1 y φ_2 son autoduales?

2.31. ¿Son lineales $\varphi_1 \vee \varphi_2$, φ_1 y $\varphi_1 \to \varphi_2$, si φ_1 y φ_2 son lineales?

2.32. Una función booleana se denomina *simétrica*, si no se cambia con cualquier redenominación de sus argumentos. Se llama *función booleana simétrica fundamental del índice* m una función booleana simétrica tal que todas conjunciones que forman parte de la FNDP de esta función tienen igualmente m letras sin negación.

Demostrar el siguiente teorema: cualesquiera función booleana simétrica es disyunción de las funciones booleanas simétricas fundamentales, cuyos índices se determinan unívocamente por la función simétrica que se presenta.

2.33. Determinar el número de funciones autoduales que dependen de n argumentos.

2.34. Demostrar la completitud de un sistema de funciones booleanas que se compone de la disyunción, la constante 0 y la equivalencia. ¿Forma base este sistema?

2.35. ¿Forma una base un sistema de funciones booleanas que se compone de la implicación y la constante 0?

2.36. Establecer, si es completo un sistema que se compone de la disyunción, la implicación y la conjunción.

2.37. ¿Forman un sistema completo la función $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ y la negación?

2.38. Demostrar que, si una función booleana no conserva la constante y es no autodual, ella es no monótona o no lineal.

2.39. Comparar las conexidades de los mografos que determinan la conjunción y la disyunción en una lógica de tres signos antes y después de la minimización.

2.40. Aclarar, si es posible realizar cualquier función booleana sobre elementos del SUANI (Sistema Universal de Automática Neumática Industrial) que representan un relé neumático descrito por la función $a(b \vee \bar{c}) \vee \bar{b}cd$.

2.41. Sintetizar en la base de Webb un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)|_1 = \vee (0, 1, 2, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20, 32, 57, 61 \text{ y } 62)$.

2.42. Sintetizar en la base $\{\rightarrow, 0\}$ un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, \ldots, x_5)|_1 = \vee (0, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 25, 27 \text{ y } 31)$.

2.43. Determinar la complejidad del semisumador en la base de Sheffer.

2.44. Demostrar que

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i}.$$

2.45. Establecer si es válida la igualdad

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}.$$

2.46. Sintetizar en la base de Webb un esquema lógico que realiza una función booleana.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)|_1 = \vee (0, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 25, 27 \text{ y } 31)$.

2.47. Determinar la complejidad del semisumador en la base $\{\rightarrow, 1\}$.

2.48. Sintetizar en la base $\{\rightarrow, \bar{}\}$ un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)|_1 = \vee (0, 1, 2, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20, 32, 57, 61 \text{ y } 62)$.

2.49. Sintetizar en la base $\{\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \bar{a}_3\}$ un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \vee (0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 15, 16, 18, 25 \text{ y } 30)$.

2.50. Sintetizar en la base $\{\rightarrow, 0\}$ un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, \ldots, x_7)|_1 = \vee (0, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12 \ldots 81 \text{ y } 101)$.

2.51. Definir el orden de exclusión de variables cuando se realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee (0, 1, 2, 4, 7, 8, 11 \text{ y } 15)$,

si se tiene un catálogo de realización de todas las funciones de dos variables; la función residual se considera simple, si se compone de dos conjunciones elementales.

2.52. Establecer qué es mayor: el peso $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ o el peso $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ de una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee (1, 3, 7, 8, 12, 14 \text{ y } 15)$.

2.53. Proponer un algoritmo para calcular el peso de la derivada de una función booleana, utilizando matrices binarias.

2.54. Establecer, si es útil desde el punto de vista de disminución de gastos para aparatos la exclusión según una o dos variables en la base de la implicación y la constante cero.

2.55. Hallar todas las funciones residuales cuando el orden de exclusión de variables de una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee (0, 4, 6, 8, 10, 13, 14 \text{ y } 15)$

es óptimo.

2.56. ¿Cuántas entradas tiene el bloque de exclusión de k variables?

2.57. Hallar una realización del bloque de exclusión de una variable en la base de Webb.

2.58. ¿Cuál es la complejidad del bloque de exclusión de una variable en la base de Sheffer?

2.59. Hallar el peso de la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ de una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 5, 6 \text{ y } 7)$.

2.60. Demostrar que

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_n)}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i}.$$

2.61. Hallar la derivada de primer orden para una función del circuito de traslado en el semisumador completo.

2.62. Determinar la derivada de segundo orden de una función de suma en el semisumador completo, la que determina las condiciones de conmutación de una función de suma al conmutar los canales correspondientes a los sumandos.

2.63. Demostrar que cualesquiera función booleana se define unívocamente por los valores de la función y de todas las derivadas en el punto 0, 0 . . . 0.

2.64. Proyectar un contador de imparidad en una base coimplicativa.

2.65. Proyectar un semisumador en una base implicativa.

2.66. Sintetizar un esquema que realiza una función que toma el valor 1 sobre los juegos de sus cinco argumentos que tienen no menos de cuatro unidades. Emplear para la síntesis los elementos de equivalencia, disyunción y negación.

2.67. Sintetizar un descifrador de tres entradas y ocho salidas utilizando los elementos O, Y y NO.

2.68. Realizar la función de implicación sobre elementos que realizan la negación y la función $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

2.69. Realizar la implicación sobre los elementos que realizan la función de Webb.

2.70. Realizar la suma según el módulo dos sobre elementos de Sheffer.

2.71. Realizar un circuito de adición en un orden sobre elementos Y, O y NO.

2.72. Realizar un circuito de adición en un orden, teniendo en cuenta la minimización de las funciones de suma y de traslado sobre los elementos O, Y y NO.

2.73. Demostrar que se puede construir un descifrador completo de n entradas, empleando dos descifradores completos de m y $n - m$ entradas y de 2^n elementos de tipo Y.

2.74. Realizar la función $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3$ sobre los elementos mayoritarios y los elementos NO.

2.75. Realizar la función $y = x_1 \to (x_2 \to x_3)$ sobre los elementos $y = x_1 \# x_2 \# x_3$ y NO.

2.76. Realizar, sobre los elementos mayoritarios y los NO, un circuito de prueba del código de paridad, o sea, un circuito, a la salida del cual surge una señal unitaria, si a la entrada del mismo hay un número par de unidades. El número de entradas equivale a tres.

2.77. Demostrar que

$$\frac{\partial(f(X)\ \&\ \varphi(X))}{\partial x_i} = f(X)\frac{\partial\varphi(X)}{\partial x_i} \oplus \varphi(X)\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f(X)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(X)}{\partial x_i}.$$

2.78. Demostrar que

$$\frac{\partial(f(X) \vee \varphi(X))}{\partial x_i} = \overline{f(X)}\frac{\partial\varphi(X)}{\partial x_i} \oplus \overline{\varphi(X)}\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f(X)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(X)}{\partial x_i}.$$

2.79. Desarrollar la función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

en una serie análoga a la serie de Taylor en los puntos 2 y 11. Comparar el número de las termas primarias en los desarrollos obtenidos.

2.80. Escribir las leyes principales del álgebra de Boole durante una interpretación aritmética de las siguientes operaciones lógicas:

$$x \& y = x \cdot y,\ x \vee y = x + y - \bar{x} \cdot y,\ \bar{\bar{x}} = 1 - x,$$

donde «·», «+», «−» son las operaciones aritméticas "multiplicación", "adición" y "sustracción", respectivamente.

2.81. 1) La lista de termas del cálculo es $\{I, +, =\}$. Las reglas de formación de las fórmulas son siguientes: a) I es la fórmula; b) si φ es la fórmula, φI también es la fórmula: c) si φ y Ψ son las fórmulas, entonces $\varphi + \Psi$ y $\varphi = \Psi$ son también fórmulas. Estan prefijados el axioma único $I + I = II$ y dos reglas de deducción:

a) si $\varphi_1 + I = \varphi_2$ es una fórmula deducible, $\varphi_1 I + I = \varphi_2 I$ también es una fórmula deducible; b) si $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$ es una fórmula deducible, $\varphi_1 + \varphi_2 I = \varphi_3 I$ también es una fórmula deducible. Demostrar que:

a) la fórmula $II + III = IIIII$ se deduce en el cálculo dado;

b) la fórmula $I + I = I$ no se deduce en el cálculo dado.

2) Un conjunto de las termas consta de un número infinito de letras y signos $\vee$ y $\rightarrow$. Las reglas de formación de las fórmulas son siguientes:

a) cualquier letra es una fórmula;

b) si α y β son fórmulas, $\alpha \vee \beta$ y $\alpha \rightarrow \beta$ son también fórmulas.

El sistema de axiomas es tal:

a) $A \vee A \rightarrow A$; b) $A \rightarrow A \vee B$; c) $A \vee B \rightarrow B \vee A$;
d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$.

Las reglas de deducción son tales: a) *regla de sustitución:* si α es una fórmula deducible y en vez de cualquier variable en esta fórmula se pone en todas partes cualquier fórmula, la fórmula nueva es también deducible;

b) *regla de conclusión* (modus ponens): si $\alpha \rightarrow \beta$ y α son fórmulas deducibles, β es también una fórmula deducible.

En el cálculo dado (cálculo de Hilbert) demostrar que son deducibles las siguientes fórmulas: 1) $A \rightarrow A$; 2) si $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, A y B se deducen, la fórmula C también se deduce.

2.82. Empleando los resultados del problema anterior, demostrar que en el cálculo de Hilbert tienen lugar las siguientes afirmaciones: si $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ se deduce, $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ también se deduce.

2.83. Introduzcamos el cálculo siguiente (cálculo de Lukasiewicz): el conjunto de las termas se compone del número infinito de letras y de signos $-$, $\rightarrow$.

Las reglas de formación de las fórmulas son:

a) todas las letras son fórmulas;

b) si φ es una fórmula, $\overline{\varphi}$ es también una fórmula;

c) si φ y Ψ son fórmulas, $\varphi \rightarrow \Psi$ es también una fórmula.

El sistema de axiomas es el siguiente:

a) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

b) $(\overline{A} \rightarrow A) \rightarrow A$, c) $A \rightarrow (\overline{A} \rightarrow B)$.

Son válidas la regla de sustitución y la de conclusión.

Demostrar que en el cálculo de Lukasiewicz se deduce la fórmula $A \rightarrow A$.

2.84. Un cálculo está prefijado del modo siguiente (cálculo de P. S. Nóvikov): el conjunto de las termas se compone del número infinito de letras y de signos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\bar{}$.

Las reglas de formación de las fórmulas son: a) todas las letras son fórmulas;

b) si α es una fórmula, $\bar{\alpha}$ es también una fórmula;

c) si α y β son fórmulas, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ son también fórmulas.

El sistema de axiomas se compone de las siguientes once axiomas:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$; 2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

3) $A \wedge B \rightarrow A$; 4) $A \wedge B \rightarrow B$; 5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (B \wedge C)$;

6) $A \to A \vee B$; 7) $B \to A \vee B$; 8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B) \to C))$;
9) $(A \to B) \to (\overline{A} \to \overline{B})$; 10) $A \to \overline{\overline{A}}$; 11) $\overline{\overline{A}} \to A$.

Como regla de deducción se utilizan la regla de sustitución y la de conclusión (modus ponens).

Demostrar que el sistema de axiomas no es contradictoria.

2.85. Demostrar que el axioma nueve del cálculo de Nóvikov (véase la condición del problema anterior) es independiente respecto a todos los demás axiomas de este cálculo.

2.86. Sea que los predicados $N(x)$, $C(x)$, $R(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, $D(x, y)$ tienen respectivamente, el sentido: x es un número natural, x es un número entero, x es un número simple, x es un número positivo, x es un número par, x divide y. Enunciar el sentido de las siguientes fórmulas del cálculo estrecho de predicados (y señalar los que son idénticamente verdaderos entre ellos):

1) $\forall(x)\ \{N(x) \to C(x)\}$;
2) $\forall(x)\ \{C(x) \to Q(x) \vee \overline{Q}(x)\}$;
3) $\forall(x)\,\exists(y)\ \{C(x) \wedge C(y) \to D(x, y)\}$;
4) $\exists(x)\ \{R(x) \wedge Q(x)\}$;
5) $\forall(x)\ \{C(x) \wedge P(x) \to N(x)\}$.

2.87. Describir un conjunto de veracidad de los siguientes predicados biádicos, definidos sobre el conjunto de los números reales:

$x^2 - y^2 = 0$; $(x > 0) \wedge (y < 0)$; $(x > 0) \to (y < 0)$.

2.88. Sobre un conjunto M son determinados los predicados monádicos $F(x)$ y $G(x)$. ¿Qué condiciones satisfacen sus campos de veracidad, si son verdaderos:

1) $\forall(x)\ \{F(x) \to G(x)\} \wedge \exists(x)\ \{\overline{F}(x) \wedge G(x)\}$;
2) $\overline{\exists}(x)\ \{F(x) \wedge G(x)\} \wedge \exists(x)\ \{F(x) \to G(x)\}$?

2.89. En un conjunto A sea definida una operación binaria asociativa y conmutativa. Sea que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$, la ecuación $\alpha \cdot \beta = \gamma$ ($\cdot$ es el signo de operación en A) es resoluble. Entonces A a la par con $\cdot$ se denomina grupo de Abel. Sea que $P(\alpha, \beta)$ significa $\alpha = \beta$ y $S(\alpha, \beta, \gamma)$ significa que γ es la suma de α y β. Demostrar que la colección de axiomas dadas a continuación define el concepto del grupo abeliano:

1) $\forall\alpha P(\alpha, \alpha)$;
2) $\forall(\alpha, \beta)(P(\alpha, \beta) \to P(\beta, \alpha))$;
3) $\forall(\alpha, \beta, \gamma)(P(\alpha, \beta) \wedge P(\beta, \gamma) \to P(\alpha, \gamma))$;
4) $\forall(\delta, \varepsilon, \omega, \alpha, \beta, \gamma)(S(\delta, \varepsilon, \omega) \wedge P(\delta, \alpha) \wedge P(\varepsilon, \beta) \wedge P(\omega, \gamma) \wedge S(\alpha, \beta, \gamma))$;
5) $\forall(\alpha, \beta)\,\exists(\gamma) S(\alpha, \beta, \gamma)$;
6) $\forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(S(\alpha, \beta, \gamma) \wedge S(\alpha, \beta, \delta) \to P(\gamma, \delta))$;
7) $\forall(\delta, \varepsilon, \omega, \alpha, \beta)(S(\delta, \varepsilon, \omega) \wedge S(\omega, \alpha, \beta) \wedge$
$\wedge S(\varepsilon, \alpha, \gamma) \to S(\delta, \gamma, \beta))$;
8) $\forall(\alpha, \beta, \gamma)(S(\alpha, \beta, \gamma) \to S(\beta, \alpha, \gamma))$;
9) $\forall(\alpha, \beta)\,\exists(\gamma) S(\alpha, \beta, \gamma)$.

2.90. Demostrar la equivalencia de las siguientes fórmulas:

a) $\exists(x)F(x)$ y $\overline{\forall(x)}\overline{F}(x)$;
b) $\forall(x)(F(x) \to A)$ y $\overline{\exists}(x)(F(x) \to A)$;
c) $\forall(x)(A \to F(x))$ y $A \to \forall(x)F(x)$.

2.91. Demostrar la equivalencia de las fórmulas:

a) $\exists(x)(A \wedge F(x))$ y $A \wedge \exists(x)F(x)$;
b) $\exists(x)(F(x) \vee G(x))$ y $\exists(x)(F(x) \to A)$;
c) $A \vee \forall(x)F(x)$ y $\forall(x)(A \vee F(x))$.

2.92. Establecer cómo se puede construir una teoría de las formas normales en el cálculo de predicados.

Comentarios

La lógica matemática es el análisis de los métodos de los razonamientos, y no su contenido. La formalización de los razonamientos remonta a Aristóteles. La lógica aristotélica (formal) adquirió el aspecto moderno en la segunda mitad del siglo XIX en la obra de George Boole "An Investigation of the Laws of Thought". Otros científicos de aquel período — P. S. Poretski, catedrático de la Universidad de Kazán, De Morgan, Frege, Pierce, Schróder, etc. — también hicieron gran aporte al proceso de formación de la lógica de enunciaciones.

La lógica matemática se desarrollaba intensamente en los años 50 de nuestro siglo debido al progreso impetuoso de la técnica digital. En 1910, el físico ruso P. Erenfest señaló la posibilidad de aplicar la lógica de enunciaciones para describir los circuitos de conmutación en la telefonía. En 1938—1940, aparecieron casi simultáneamente los trabajos del científico ruso V. I. Shestakov, el norteamericano Shannon y los japoneses Nakashima y Hansawa sobre la aplicación de la lógica matemática en la técnica digital. En 1951, en la URSS fue puesto en explotación el ordenador МЭСМ (PMCE Pequeña Máquina Calculadora Electrónica), el primero en Europa, diseñado bajo la dirección de S. A. Lébedev. La primera monografía, dedicada al empleo de la lógica matemática para diseñar los aparatos digitales, fue publicada en la URSS por el científico soviético M. A. Gavrílov, en 1950.

P. S. Nóvikov, destacado científico soviético, y sus discípulos, contribuyeron mucho al desarrollo de esta parte de la matemática discreta.

Para profundizar los conocimientos acerca de la lógica matemática, recomendamos las obras indicadas en la bibliografía.

«La Naturaleza habla el idioma de las matemáticas: las letras de éste son círculos, triángulos y otras figuras matemáticas».

Galileo Galilei

CAPÍTULO 3
Teoría de los grafos y mografos

§ 3.1. Grafo ponderado y su planteamiento matricial

Anteriormente el concepto del grafo fue definido como colección de un conjunto de vértices V y de arcos $U_2 \subset V^2$. Un arco u unido con un vértice v se denomina *incidente al vértice* v y el vértice v se denomina *coincidente al arco* u. En el arco (v_i, v_j), los vértices v_i y v_j se llaman *de frontera* con la particularidad de que v_i es *origen* y v_j es *fin* del arco. Para contar los *vértices aislados,* es decir, los vértices no coincidentes a ningún arco, extendamos el concepto del grafo G hasta la coleción de la forma

$$G = \langle V, U_1, U_2 \rangle, \; U_1 \subset V, \; U_2 \subset V^2,$$

donde la relación monaria U_1 determina los vértices aislados y U_2, los arcos.

Al sacar arcos del grafo $G = \langle V, U_1, U_2 \rangle$ obtenemos un *grafo parcial* $G' \subset G$, $G' = \langle V, U_1, U_2' \rangle$, $U_2' \subset U_2$, del grafo G, al sacar los vértices y sus arcos incidentes obtenemos un *subgrafo* $G'' = \langle V'', U_1'', U_2'' \rangle$, $V'' \subset V$, $U_1'' \subset U_1$, $U_2'' \subset U_2$ del grafo G. Al seguir sacando los arcos del subgrafo G'' del grafo G obtenemos un *subgrafo parcial* $\bar{G} = \langle V, \bar{U}_1, \bar{U}_2 \rangle$ del grafo G.

Dos arcos u_α y u_β se denominan *adyacentes,* si son incidentes a un mismo vértice.

Dos vértices v_a y v_b se llaman *adyacentes,* si se unen mediante un arco.

Un conjunto de los vértices adyacentes con el vértice v_α llámase su *entorno* y se denota mediante $O(v_\alpha)$ o Γv_α. Empleando el concepto de entorno el grafo se define como una colección del conjunto de los vértices y un conjunto de sus entornos: $G = \langle V, \Gamma \rangle$.

Definamos el concepto del *grafo ponderado.* A cada vértice $v_i \in V$ ($V = \{v_i / i = 1, 2, \ldots, n\}$) del grafo $G = \langle V, U_1, U_2 \rangle$ le pongamos en correspondencia el peso w_i de un conjunto de los pesos $W = \{w_i / i = 1, 2, \ldots\}$. Como resultado obtenemos un conjunto de los *vértices ponderados* $\{(v_i, w_i)/i = 1, 2, \ldots, n\}$, con ello, no hace falta que todos los pesos sean distintos.

Pongamos el peso p_i del conjunto de pesos $P = \{p_i / i = 1, 2, \ldots\}$ en correspondencia a cada elemento del conjunto $U_2 = \{u_i / i = 1, \ldots, m\}$. Como resultado obtenemos un conjunto de los *arcos ponderados* $\{(u_i,$

$p_i)/i = 1, 2, \ldots, m\}$; además, no hace falta que sean distintos todos los pesos.

Los conjuntos de vértices y arcos ponderados dados anteriormente en su conjunto definen un grafo ponderado $G = \langle\langle \bar{V}, W\rangle, \langle U, P\rangle\rangle$, $\bar{V} = V \cup U \cup U_1$, el que, estrictamente dicho, ya no es un grafo, sino una función definida sobre los vértices y los arcos del grafo.

Para prefijar los grafos existen varias clases de matrices, entre las cuales las principales son la clase de matrices de incidencias y la de matrices de adyacencia. Examinemos estas clases de matrices.

Clase de matrices de incidencias. Si el grafo G contiene n vértices y m arcos, la matriz de incidencias $A(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$ se determina como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si el vértice } v_j \text{ es el origen del arco } u_i; \\ -1, \text{ si el vértice } v_j \text{ es el fin del arco } u_i; \\ 0, \text{ si el vértice } v_j \text{ no es coincidente al arco } u_i. \end{cases}$$

A veces el grafo contiene lazos, es decir, arcos de tipo (v_i, v_i). En este caso ciertos elementos de la matriz A son iguales a 1 y -1 simultáneamente, lo que lleva a la multiformidad de los elementos de la matriz A.

Para prefijar un grafo con lazos dividamos la matriz A en dos matrices A^+ y A^-:

$$A^+ = [a_{ij}^+]_{m \times n},$$

donde $a_{ij}^+ = \begin{cases} 1, \text{ si el vértice } v_j \text{ es el origen del arco } u_i; \\ 0 \text{ en caso contrario;} \end{cases}$

$$A^- = [a_{ij}^-]_{m \times n},$$

donde $a_{ij}^- = \begin{cases} 1, \text{ si el vértice } v_j \text{ es el fin del arco } u_i; \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$

Si un grafo no tiene lazos, $A = A^+ - A^-$. Las matrices A^+ y A^- describen el grafo sin tener en cuenta los pesos de los vértices y arcos.

Prefijemos los pesos de los vértices de un grafo G en forma de una matriz columna

$$W(G) = \begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Vmatrix},$$

y los pesos de los arcos en forma de una matriz diagonal de orden m

$$P(G) = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & p_2 & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots p_m \end{Vmatrix}$$

Las matrices A^+, A^-, W, P describen completamente un grafo ponderado.

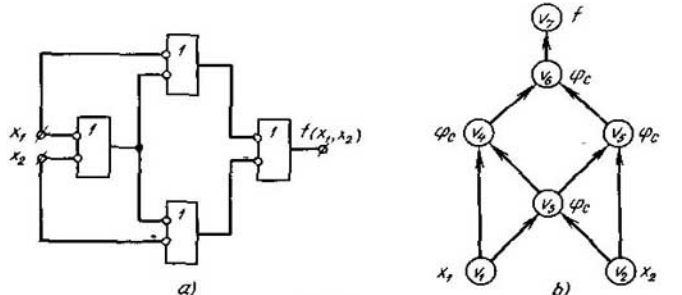


Fig. 3.1

Examinemos un esquema lógico que realiza la adición según el módulo dos $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ en la base de Sheffer $\varphi_{sh}(\alpha, \beta) = \overline{\alpha \vee \beta}$ (fig. 3.1, *a*) y su respectivo grafo ponderado $G = \langle (V, W), U \rangle$, cuyos vértices v_1, v_2,... ..., v_i, $i = 3, 4, 5, 6$ y v_7 son ponderados por las variables x_1 y x_2, de la variable funcional φ_{sh} del elemento de Sheffer y una variable funcional f, respectivamente. El origen del arco corresponde a una variable x_1, x_2, o a la salida del elemento de Sheffer, el fin del arco corresponde a la entrada del elemento de Sheffer o bien a la variable funcional f. Entonces el grafo $G = \langle (V, W), U \rangle$ (fig. 3.1, *b*) que determina este esquema lógico se representa por matrices de la clase examinada como

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad W(G) = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ f \end{Vmatrix}$$

Clase de matrices de adyacencia. La matriz de adyacencia $S = [s_{ij}]_{n \times n}$ de un grafo no ponderado se define del modo siguiente:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } (v_i, v_j) \in U \\ 0, \text{ si } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Para un grafo ponderado

$$s_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, \text{ si el arco } (v_i, v_j) \in U \text{ tiene peso } p_{ij}; \\ 0, \text{ si } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Las matrices S, W, P describen completamente un grafo ponderado. Por ejemplo, el grafo G (fig. 3.1, b) se prefija por matrices de esta clase como

$$S(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad W(G) = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ f \end{Vmatrix}$$

Al prefijar el grafo G (fig. 3.1, b) está ausente la matriz $P(G)$, puesto que los arcos de este grafo no son ponderados.

Dos grafos $G = \langle V, U \rangle$ y $G' = \langle V', U' \rangle$ se llaman *isomorfos*, si existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices V y V' tal que los vértices v_a y v_b se unen mediante el arco (v_a, v_b) en un grafo en aquel, y sólo en aquel caso, cuando sus respectivos vértices $v_{a'}$ y $v_{b'}$ se unen mediante un arco $(v_{a'}, v_{b'})$ en otro grafo.

Las matrices de las clases examinadas prefijan los grafos con exactitud de hasta el isomorfismo.

Denotaremos una matriz de incidencias transpuesta A^+ mediante $(A^+)^T$. Una matriz de adyacencia, matrices de incidencias inicial A^+ y final A^-, así como una matriz diagonal de los pesos de arcos están relacionadas por la siguiente igualdad:

$$S = (A^+)^T \cdot P \cdot (A^-). \tag{3.1}$$

Se denomina *potencia* $s(v)$ de un vértice v el número de arcos (aristas) incidentes a este vértice.

Empleando el concepto de mografo se puede prefijar, con mayor eficacia en el sentido del volumen consumido de la información, grafos grandes G_i, cuyas matrices de adyacencia están débilmente llenas por las unidades. Los grafos de esta clase tienen gran importancia práctica.

Prefijaremos un grafo no orientado conexo $G = \langle V, U \rangle$, sin lazos por un modelo $\Psi = \langle M, S_1, S_2, \ldots, S_n \rangle$, en el cual $M = V$; la palabra definida

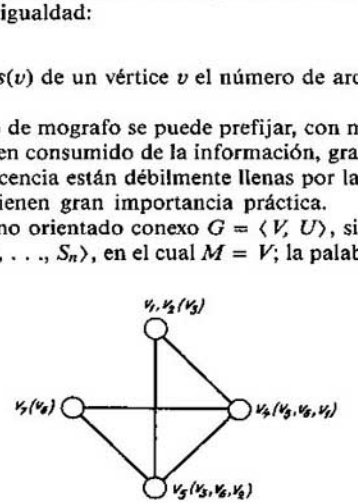


Fig. 3.2

por S_i es un entorno $O(v_\alpha)$ de radio unidad del vértice $v_\alpha \in V$ que contiene $i-1$ vértices y el vértice v_α. Para ilustrar esta representación, consideremos el mismo grafo G (fig. 3.1, b), sin tener en cuenta la orientación de sus aristas. En este caso la matriz de incidencia $Q(\Psi)$ es la matriz de adyacencia $S(\Psi)$ del grafo G, cuyos elementos diagonales son iguales a 1:

$$Q(\Psi) = \begin{array}{c|ccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Reduzcamos la minimización del volumen consumido de la información para expresar un grafo a un cubrimiento de columnas por filas de la matriz $Q(\Psi)$. Para disminuir la densidad de trabajo de la búsqueda de un cubrimiento minimal tachemos filas y columnas que se absorben. *La fila α absorbe la fila β*, si el conjunto M_α de columnas cubiertas por la fila α contiene el conjunto M_β de columnas cubiertas por la fila β, $M_\alpha \supset M_\beta$. *La columna a absorbe la columna b*, si el conjunto M_b de las filas que cubren la columna b contiene el conjunto M_a de las filas que cubren la columna, a, $M_a \subset M_b$.

Hallemos un cubrimiento de columnas por filas de la matriz $Q(\Psi)$, después eliminemos los elementos unitarios no diagonales comprendidos en el cubrimiento y volvamos a cubrir las columnas hasta llegar a que todos los elementos no diagonales sean iguales a cero. Obtenemos como resultado una expresión minimizada del grafo G en forma del correspondiente mografo, cuya signatura representa cortaduras de los elementos de los cubrimientos obtenidos.

En el caso a examinar el cubrimiento minimal tiene la forma $\{v_3, v_6\}$. A este curbimiento le corresponden dos entornos de radio unidad: $O(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ y $O(v_6) = \{v_4, v_5, v_7\}$. Después de eliminar las unidades correspondientes de la matriz $Q(\Psi)$ obtenemos la matriz

$$Q'(\Psi) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4' & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

que tiene cubrimiento $\{v_1, v_2\}$ o bien $\{v_4, v_5\}$. Para ser precisos, escojamos el primer cubrimiento. El grafo G que se examina definitivamente se prefija

por el modelo Ψ, cuya matriz de incidencia tiene forma

$$\tilde{Q}(\Psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 & v_7 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} v_3 \\ v_6 \\ v_1' \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

Para prefijar esta matriz es necesario tener 20 bitios en vez de 49 bitios, cuando este grafo se prefija por la matriz de adyacencia. El mografo $G^M(\tilde{Q}(\Psi))$ está representado en la fig. 3.2. La minimización del planteamiento de los grafos orientados con lazos es análogo al primer procedimiento. Los orígenes y los fines de los arcos del grafo se prefijan independientemente en forma del mografo $(G^M)^+$ y el $(G^M)^-$, respectivamente.

Para representar grafos en forma de una composición de grafos más simples introduzcamos tres operaciones siguientes: unión, suma y producto.

Se denomina *unión* de grafos $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$ y $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$ el grafo $G = \langle V, U \rangle$ cuyos portador y signatura son, respectivamente, la unión de la teoría de los conjuntos de los portadores V_a, V_b y de las signaturas U_a, U_b de los grafos G_a, G_b (fig. 3.3, *a*).

Llámase *suma* de grafos $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$ y $\overline{G_b} = \langle V_b, U_b \rangle$ un grafo $G = \langle V, U \rangle$ que es la unión de los grafos G_a, G_b y un grafo completo

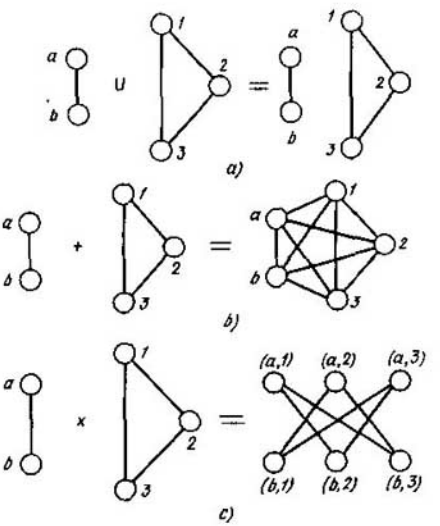


Fig. 3.3

de dos partes $K_{|V_a|,\,|V_b|}$ construido sobre los portadores $V_a \setminus V_a \cap V_b$ y $V_b \setminus V_a \cap V_b$. En otras palabras, para construir la suma de los grafos G_a y G_b se determina su unión y cada vértice $v_i \in V_a$ no comprendido en la intersección $V_a \cap V_b$, se une con todos los vértices $V_b \setminus V_a \cap V_b$ y viceversa. Diremos que el vértice v *conifica* el grafo G, si v y todos los vértices del grafo G son adyacentes. Los vértices no comprendidos en la intersección de los sumandos, $v_i \notin V_a \cap V_b$, conifican, al sumar los grafos G_a y G_b, $V_b \setminus V_a \cap V_b$ y $V_a \setminus V_a \cap V_b$, respectivamente (fig. 3.3, *b*).

Se denomina *producto* (*producto cartesiano*) de grafos $G_a = \langle V_a, \Gamma_a \rangle$ y $G_b = \langle V_b, \Gamma_b \rangle$ el grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$, $V = V_a \times V_b = \{(v_{a_i}, v_{b_j}) / v_{a_i} \in V_a, v_{b_j} \in V_b\}$, $\Gamma(v_{a_i}, v_{b_j}) = \Gamma v_{a_i} \times \Gamma v_{b_j}$ (fig. 3.3, *c*)

§ 3.2. Conexión y conexión fuerte de un grafo

La distribución de cadenas y ciclos en un grafo no orientado, así como de caminos y circuitos en un grafo orientado, determina muchas propiedades del grafo, incluso su conexión y conexión fuerte.

Llámase *cadena* una sucesión de aristas $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ de tipo $\varrho_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Los vértices de una cadena pueden tener potencia igual a 1. El *vértice* v_i de potencia igual a 1 se llama *vértice extremo*.

El número de aristas de una cadena que une los vértices v_i y v_j se denomina *longitud l* (v_i, v_j) de la cadena.

Se llama *ciclo* una cadena, cuyos vértices finales coinciden. Todos los vértices del ciclo tienen potencia $s(v_i) \geqslant 2$.

Una *cadena* se denomina *compuesta,* si en ella se repite al menos una arista, *compleja,* si se repite al menos un vértice y *simple,* en caso contrario.

Un grafo $G = \langle V, U \rangle$ se denomina *conexo*, si cualquier par de sus vértices se une por una cadena.

Un subgrafo conexo, maximal respecto a la inclusión de vértices, de un grafo se denomina su *componente de conexión*. Un grafo se llama *inconexo*, si el número de sus componentes es más que uno. Por ejemplo, un grafo que se compone de dos vértices no adyacentes es inconexo y tiene dos componentes de conexión.

Examinemos el algoritmo para determinar la conexión de un grafo y el número de sus componentes.

Teorema 3.1. *Un elemento de una matriz* S^n ($S = [s_{ij}]$, es decir, *una matriz de adyacencia,*

$$s_{ij} = \begin{cases} \text{el conjunto de los identificadores de aristas que unen} \\ \text{los vértices } v_i,\ v_j; \\ 0, \text{ si los vértices } v_i,\ v_j \text{ no son adyacentes,} \end{cases}$$

es un conjunto de cadenas de longitud n que unen los vértices v_i, v_j.

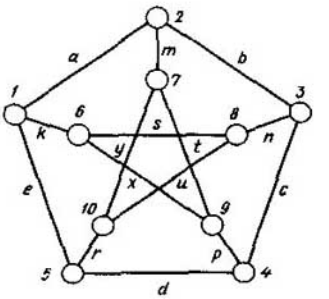


Fig. 3.4

Al elevar una matriz de adyacencia $S = [s_{ij}]$ a la potencia n, la multiplicación se examina como concatención, o sea, añadimos el identificador correspondiente a j-ésima columna a la derecha del identificador correspondiente a i-ésima fila, la sumación se examina como unión de palabras obtenidas como resultado de la multiplicación.

Ejemplo 3.1. Examinemos la distribución de cadenas en un grafo no orientado de Peterson (fig. 3.4), cuya matriz de adyacencia tiene forma siguiente:

$S =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1		a			e	k					1
2	a		b				m				2
3		b		c				n			3
4			c		d				p		4
5	e			d						r	5
6	k							s	x		6
7		m							t	y	7
8			n			s				u	8
9				p		x	t				9
10					r		y	u			10

La matriz de adyacencia S determina la distribución de aristas (cadenas de longitud unitaria). Para determinar las cadenas de longitud 2 elevemos la matriz de adyacencia al cuadrado:

$S^2 =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
aa, ee, kk		*ab*	*ed*			*am*	*ks*	*kx*	*er*	1
	aa, bb, mm		*bc*	*ae*	*ak*		*bn*	*mt*	*my*	2
ab		*bb, cc, nn*		*cd*	*ns*	*bm*		*cp*	*nu*	3
ed	*bc*		*cc, dd, pp*		*px*	*pt*	*cn*		*dr*	4
	ae	*cd*		*ee, dd, rr*	*ek*	*ry*	*ru*	*dp*		5
	ak	*ns*	*px*	*ek*	*kk, ss, xx*	*xt*			*su*	6
am		*bm*	*pt*	*ry*	*xt*	*mm, tt, yy*	*yu*			7
ks	*bn*		*cn*	*ru*			*nn, ss, uu*	*sx*		8
kx	*mt*	*cp*		*dp*				*pp, xx, tt*	*ty*	9
er	*my*	*nu*	*dr*		*su*			*ty*	*rr, yy, uu*	10

Sumando las matrices $S + S^2$ obtenemos que en la matriz resultado faltan elementos nulos, lo que significa que existen cadenas de longitud 1 o de longitud 2 entre cualquier par de vértices del grafo de Peterson. Por consiguiente, el grafo de Peterson es conexo y es un componente de conexión.

El concepto de la cadena es principal para estudiar propiedades métricas de un grafo.

Una longitud minimal de cadena que une los vértices v_i y v_j se denomina *distancia* $r(v_i, v_j)$ entre los vértices v_i, v_j:

$$r(v_i, v_j) = \min_k l_k(v_i, v_j).$$

La distancia maximal entre los vértices del grafo G se denomina *diámetro* del grafo $d(G)$:

$$d(G) = \max_{ij} \min_k l_k(v_i, v_j).$$

La función $r(v_i, v_j)$ introducida sobre el conjunto de todos los pares de vértices (v_i, v_j) del grafo G determina su métrica. En efecto, esta función

$r(v_i, v_j)$ satisface tres axiomas siguientes:

$(\forall v_i, v_j)(r(v_i, v_j) = 0) \leftrightarrow v_i = v_j,$

$(\forall v_i, v_j)(r(v_i, v_j) = r(v_j, v_i)),$

$(\forall v_i, v_j, v_k)(r(v_i, v_j) + r(v_j, v_k) \geqslant r(v_i, v_k)).$

El último axioma suele llamarse desigualdad triangular.

Una matriz A se denomina de *k células,* si una permutación de columnas y filas la reduce a la forma

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & A_2 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & A_3 \ldots 0 \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \quad A_k \end{Vmatrix}$$

donde la matriz A_i, $i = 1, \ldots, k$ no contiene ningún elemento nulo (excepto, tal vez, los elementos diagonales).

Teorema 3.2. *Un grafo G comprende k componentes de conexión si, y sólo si, su matriz de alcance D(G),*

$$D(G) = \sum_{i=1}^{d(G)} [S(G)]^i, \tag{3.2}$$

(donde $S(G)$ es la matriz de adyacencia, $i = 1$, $d(G)$, es el diámetro del grafo (G) es de k células.

Un *ciclo* se denomina *euleriano,* si cada arista del grafo participa en su formación una vez; un grafo que contiene tal ciclo se llama *de Euler.*

Teorema 3.3. *Un grafo $G = \langle V, U \rangle$ es euleriano si, y solo si, es conexo y la potencia $s(v_i)$ de cada vértice $v_i \in V$ es un número par.*

Un *ciclo* simple se denomina *de Hamilton,* si pasa por cada vértice del grafo; un grafo que contiene tal ciclo llámase *hamiltoniano.*

El teorema 3.3 determina un criterio simple para revelar la propiedad de Euler para cada grafo. Para determinar la propiedad hamiltoniana se tiene la siguiente condición suficiente.

Teorema 3.4 (teorema de Dirac). *Si un grafo $G = \langle V, U \rangle$, $|V| \geqslant 3$, es conexo y la potencia de cada vértice $v_i \in V$,*

$$s(v_i) \geqslant \left[\frac{1}{2} |V|\right], \tag{3.3}$$

donde [ ] es el próximo número entero, entonces el grafo es de Hamilton.

Un grafo compuesto de un vértice se llama *trivial.* La eliminación de un vértice de un grafo no trivial G conduce a un subgrafo $G \setminus v$ que contiene todos los vértices del grafo G, excepto v, y todas las aristas del grafo G, no incidentes a v. De modo análogo, la eliminación de una arista x reduce a un subgrafo (subgrafo de esqueleto) que contiene todos los vértices

y las aristas, excepto la arista x, es decir $G \setminus x$. La potencia mínimal de los vértices de un grafo se designa por $\delta(G) = \min_i s(v_i)$, $v_i \in G$. Si todos los vértices de un grafo tienen la misma potencia n éste se llama grafo *regular* de potencia n.

Se denomina *conexión de un grafo* $\varkappa(G)$ el número mínimo de vértices, cuya eliminación hace el grafo inconexo o trivial. De esta definición se desprende que para cualquier grafo inconexo $\varkappa(G) = 0$. Un grafo completo K_n se hace trivial, si eliminar $n - 1$ vértices. Por eso, $\varkappa(K_n) = n - 1$.

Si $\varkappa(G) \geqslant n$, el grafo G se denomina *n-conexo.*

Llámase *conexión por aristas* $\lambda(G)$ del grafo G el número mínimo de aristas, cuya eliminación reduce a un grafo inconexo o trivial. Para un grafo inconexo o trivial $\lambda(G) = 0$.

Para cualquier grafo G la conexión, la conexión por aristas y la potencia mínimal están relacionadas por la siguiente desigualdad:

$$\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G) \tag{3.4}$$

Entre todos los grafos de n vértices y m aristas la conexión mínima es igual a 0, si $m < n - 1$, y es igual a $[2\ m/n]$, si $m \geqslant n - 1$, donde los corchetes [ ] significan que se toma la parte entera de la expresión.

Las cadenas simples se denominan *no intersecantes por aristas*, si ningunas dos de ellas tienen una arista común. Pero, si tales cadenas tampoco tienen vértices comunes se llaman *no intersecantes por vértices.*

Sean G un grafo conexo y u, v sus dos vértices distintos. Un conjunto de aristas E del grafo G se denomina *conjunto u, v-divisor* en G, si cualquier cadena simple de u en v contiene una arista de E. Un conjunto de vértices V del grafo que no contiene u, v se llama conjunto *u, v-separador* en G, si cualquier cadena simple de u en v incluye un vértice de V.

Si un conjunto *u, v*-divisor E contiene k aristas, el número de cadenas simples no intersecantes por aristas de u en v no puede superar k, puesto que en caso contrario alguna arista de E debe pertenecer a más de una cadena simple. Si un conjunto *u, v*-divisor tiene potencia mínima, el número de cadenas simples no intersecantes por aristas entre u y v es exactamente igual a k.

Teorema 3.5. *El número maximal de cadenas simples, no intersecantes por aristas, que unen dos vértices distintos u, v de un grafo conexo G es igual al número minimal de aristas en el conjunto u, v-divisor.*

Teorema 3.6. *El número maximal de cadenas simples, no intersecantes por vértices, que unen dos vértices distintos no adyacentes u, v del grafo G es igual al número minimal de vértices en un conjunto u, v-separador.*

Teorema 3.7. *Un grafo es n-conexo si, y sólo si, cualquier par de sus vértices se une, al menos, por n cadenas no intersecantes por vértices.*

Teorema 3.8. *Un grafo es n-conexo por aristas si, y sólo si, cualquier*

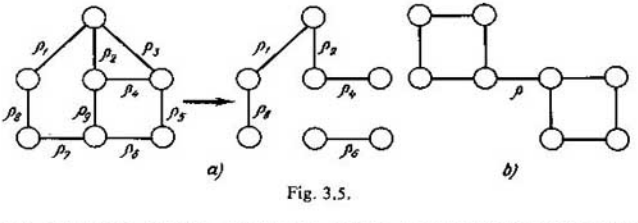


Fig. 3.5.

par de sus vértices se une, al menos, por n cadenas no intersecantes por aristas.

Teorema 3.9 (teorema de Menger). *Para cualesquiera dos conjuntos de vértices* V_α, V_β (V_α, $V_\beta \neq \varnothing$; $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$) *el número máximo de cadenas no intersecantes que unen* V_α *y* V_β *es igual al número mínimo de vértices que separan* V_α *y* V_β.

Los teoremas 3.5—3.9 determinan la dependencia de conexión de un grafo respecto del número de cadenas no intersecantes. Por primera vez la investigó Menger.

Se denomina *conjunto divisor de un grafo G conexo* a tal conjunto de sus aristas que, al eliminarlas de G, éste se hace inconexo. Por ejemplo, el conjunto $\{\rho_7, \rho_9, \rho_5, \rho_3\}$ en la fig. 3.5, *a* es separador y su eliminación lleva a formar dos componentes de conexión.

Se denomina *corte* tal conjunto divisor que no tiene subconjunto divisor propio. El conjunto $\{\rho_7, \rho_9, \rho_5, \rho_3\}$ no es corte, ya que contiene subconjunto divisor $\{\rho_7, \rho_9, \rho_5\}$. Este subconjunto no tiene subconjuntos divisores propios y por eso es corte. Un corte que consta de una arista se denomina *puente* (fig. 3.5, *b*). A veces el corte se llama *cociclo*.

Examinemos un grafo orientado y su propiedad de *ser fuertemente conexo*.

Se denomina *camino* una sucesión de arcos $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ de la forma $\delta_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Los vértices de un camino tienen la potencia igual a 1 ó 2. Un vértice v_i de potencia 1 se denomina *extremo* con ello, el vértice v_1 conicidente al arco δ_1 se denomina *inicial*, el vértice v_{n+1} coincidente al arco δ_n se llama *final*.

El número de arcos que forman un camino se denomina *longitud del camino*.

Llámase *circuito* un camino, cuyos vértices extremos coinciden. Todos los vértices del circuito tienen la potencia $s(v_i) \geqslant 2$.

Un camino se denomina *compuesto*, si en ella se repite al menos un arco, *complejo*, si se repite al menos un vértice y *simple*, en caso contrario.

Un grafo $G = \langle V, U \rangle$ se denomina *fuertemente conexo*, si cualquier par de vértices se une por un camino.

Un subgrafo fuertemente conexo, maximal respecto a la inclusión de vértices, de un grafo se denomina su *componente de conexión fuerte*. Un grafo se denomina *no fuertemente conexo*, si el número de sus componentes de conexión fuerte es más de 1.

Examinemos el algoritmo de determinación de conexión fuerte de un grafo y del número de sus componentes, de conexión fuerte. Lo mismo que el algoritmo para determinar conexión de un grafo y el número de sus componentes de conexión, examinados para el caso de un grafo no orientado, este algoritmo se basa en el empleo de los teoremas 3.1 y 3.2

Ejemplo 3.2. Determinemos la conexión fuerte del grafo orientado de Peterson (fig. 3.6), cuya matriz de adyacencia tiene siguiente forma:

$S(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	a									1
		b								2
			c							3
				d						4
e										5
k								x		6
	m								y	7
		n			s					8
			p			t				9
				r			u			10

Para determinar los componentes de conexión fuerte basándose en el teorema 3.2, hay que elevar la matriz de adyacencia del grafo $S(G)$ a la potencia maximal igual al diámetro $d(G)$ de este grafo:

$$d(G) = \max_j \min_i l(v_i, v_j), \tag{3.5}$$

donde $l(v_i, v_j)$ es longitud del camino del vértice v_i al vértice v_j.

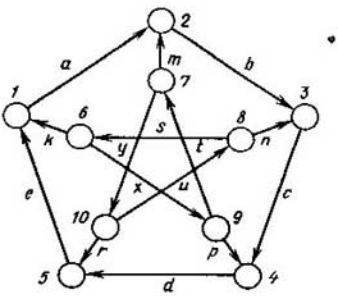


Fig. 3.6

En el caso examinado el diámetro $d(G)$ del grafo G es igual a 5. Calculamos la matriz de alcance $D(G)$ como $\sum_{i=1}^{5} [S(G)]^i$:

$$D = \sum_{i=1}^{5} S^i = S + S^2 + S^3 + S^4 + S^5 =$$

$D(G) =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	abcde	*a*	*ab*	*abc*	*abcd*						1
	bcde	*bcdea*	*b*	*bc*	*bcd*						2
	cde	*cdea*	*cdeab*	*c*	*cd*						3
	de	*dea*	*deab*	*deabc*	*d*						4
	e	*ea*	*eab*	*eabc*	*eabcd*						5
	$d_{6,1}$	$d_{6,2}$	$d_{6,3}$	$d_{6,4}$	$d_{6,5}$	*xtyus*	*xt*	*xtyu*	*x*	*xty*	6
	$d_{7,1}$	$d_{7,2}$	$d_{7,3}$	$d_{7,4}$	$d_{7,5}$	*yus*	*yu*	*yusxt*	*yusx*	*y*	7
	$d_{8,1}$	$d_{8,2}$	$d_{8,3}$	$d_{8,4}$	$d_{8,5}$	*s*	*sxt*	*sxtyu*	*sx*	*sxty*	8
	$d_{9,1}$	$d_{9,2}$	$d_{9,3}$	$d_{9,4}$	$d_{9,5}$	*tyus*	*t*	*tyu*	*tyusx*	*ty*	9
	$d_{10,1}$	$d_{10,2}$	$d_{10,3}$	$d_{10,4}$	$d_{10,5}$	*us*	*usxt*	*u*	*usx*	*usxty*	10

$d_{6,1} = k$, *xpde, xtyre*, $d_{6,2} = ka$, *xtm, xpdea*,
$d_{6,3} = kab$, *xtmb, xtyun*, $d_{6,4} = xp$, *kabc, xtmbc*,
$d_{6,5} = xpd$, *xtyr, kabcd*, $d_{7,1} = yre$, *yusk, mbcde*,
$d_{7,2} = m$, *yrea, yuska*, $d_{7,3} = mb$, *yun, yreab*,
$d_{7,4} = mbc$, *yunc, yusxp*, $d_{7,5} = yr$, *mbcd, yuncd*,
$d_{8,1} = sk$, *ncde, sxpde*, $d_{8,2} = ska$, *sxtm, ncdea*,
$d_{8,3} = n$, *skab, sxtmb*, $d_{8,4} = nc$, *sxp, skabc*,
$d_{8,5} = ncd$, *sxpd, sxtyr*, $d_{9,1} = pde$, *tyre, tyusk*,
$d_{9,2} = tm$, *pdea, tyrea*, $d_{9,3} = tmb$, *tyun, pdeab*,
$d_{9,4} = p$, *tmbc, tyunc*, $d_{9,5} = pd$, *tyr, tmbcd*,
$d_{10,1} = re$, *usk, uncde*, $d_{10,2} = rea$, *uska, usxtm*,
$d_{10,3} = un$, *reab, uskab*,
$d_{10,4} = unc$, *usxp, reabc*,
$d_{10,5} = r$, *uncd, usxpd*.

En la matriz de alcance, al componente de conexión fuerte le corresponde una submatriz de dimensión maximal, cada elemento de la cual no es igual a 0. Los elementos que muestran la relación entre estos submatrices pueden ser distintos de 0.

En el ejemplo dado tenemos dos componentes de conexión fuerte con portadores {1, 2, 3, 4, 5} y {6, 7, 8, 9, 10} respectivamente.

Se denomina *red* un grafo orientado $G = \langle V, U \rangle$, en el cual se escogen dos conjuntos de vértices polares V^+ y V^- tales que de cada vértice $v_i \in V^+$ los arcos solamente salen, en cada vértice $v_i \in V^-$ los arcos solamente entran y cada vértice $v_i \in V \setminus (V^+ \cup V^-)$ es coincidente tanto a los arcos entrantes,

como a los salientes. Ponemos en correspondencia a cada arco un número positivo que determina su «capacidad». Entonces, se puede enunciar otra variante del teorema de Menger para un grafo orientado ponderado por los arcos.

Teorema 3.10. *El flujo maximal a través de una red es igual a la capacidad minimal de su corte.*

Un algoritmo de determinación del flujo maximal se examina en el § 3.5.

§ 3.3. Ciclomática

Para investigar los ciclos en un grafo se usa la matriz ciclomática $C(G) = [c_{ij}]$. Ponemos en correspondencia biunívoca a cada ciclo del grado un vector fila de la matriz $C(G)$. Todo elemento de esta fila se define del modo siguiente:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } j\text{-ésima arista se incorpora en } i\text{-ésimo ciclo;} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Un conjunto $C(G)$ de todos los vectores, cada uno de los cuales corresponde a un ciclo del grafo G, forma un espacio vectorial llamado *espacio de los ciclos del grafo G*. Además, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cualesquiera dos ciclos R_i, $R_j \in C(G)$, $R_i \cap R_j \neq \varnothing$ existe cierto tercer ciclo $(R_i \oplus R_j) \in C(G)$, donde $\oplus$ significa adición según el módulo dos por órdenes.

2. La adición según el módulo dos posee la propiedad conmutativa, es decir, para cualesquiera dos R_i, $R_j \in C(G)$

$$R_i \oplus R_j = R_j \oplus R_i.$$

3. La adición según el módulo dos es asociativa, es decir, para cualesquiera R_i, R_j, $R_k \in C(G)$

$$(R_i \oplus R_j) \oplus R_k = R_i \oplus (R_j \oplus R_k).$$

Se denomina *base de un espacio vectorial* cualquier sistema de vectores linealmente independientes que engendra el espacio dado. Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial cuando, y sólo cuando, cualquier elemento de este espacio se representa de manera única en forma de una combinación lineal de vectores del conjunto. Si un espacio tiene base de n vectores se denomina *espacio n-dimensional.*

Base de ciclos del grafo G es una base del espacio de los ciclos del grafo G compuesto de ciclos simples.

Un vector R depende de ciclos simples $R_1, R_2, \ldots, R_n$, si se representa en forma de la combinación lineal de vectores

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Cualquier vector de un ciclo del grafo G puede representarse en forma de una combinación lineal de los vectores de la base de los ciclos. Examinemos, por ejemplo, el grafo representado en la fig. 3.7, *a*. La matriz ciclomática $C(G)$ de este grafo tiene la forma

$$C(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & m & g & h \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{array}$$

En calidad del sistema básico de ciclos se puede tomar los ciclos R_1, R_2, R_3. Se puede comprobar que todos los otros ciclos se representan como su combinación lineal según el módulo dos:

$$R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 = R_4,\ R_1 \oplus R_2 = R_5,\ R_1 \oplus R_3 = R_7,\ R_2 \oplus R_3 = R_6.$$

Se denomina *árbol* un grafo conexo que no contiene ningún ciclo. Se denomina *subgrafo de esqueleto* de un grafo un subgrafo que contiene todos los vértices del grafo. Se denomina *esqueleto* un subgrafo esqueleto que es un árbol. Se llama *cuerda de un esqueleto* D en un grafo conexo G cualquier arista del grafo que no pertenece a D. Cualquier subgrafo compuesto de una cuerda y el esqueleto tiene exactamente un ciclo. El *número ciclomático* $\nu(G)$ de un grafo G es igual al número de cuerdas de cualquier esqueleto en G.

Si un grafo conexo G tiene n vértices y m aristas, se tiene

$$\nu(G) = m - n + 1. \tag{3.6}$$

Si el grafo G contiene k componentes de conexión, su número ciclomático es

$$\nu(G) = m - n + k. \tag{3.7}$$

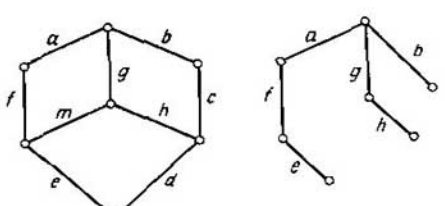


Fig. 3.7 *a)* *b)*

El número ciclomático de un grafo inconexo puede determinarse como la suma de los números ciclomáticos de sus componentes de conexión:

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^{k} \nu(G_i) \tag{3.8}$$

El número ciclomático determina la medida de conexión de un grafo. Indiquemos que las propiedades de los ciclos de un grafo y de sus cortes se parecen. Se denomina *bosque* un grafo que no contiene ciclos. En otras palabras, si un grafo comprende varios componentes de conexión, cada uno de los cuales es un árbol, este grafo es un bosque. Si un bosque G tiene n vértices y k componentes de conexión, éste contiene $n - k$ aristas.

Llámase *bosque de esqueleto* un grafo, cada componente del cual es un árbol de esqueleto.

El *rango cocíclico* $\chi(G)$ (*rango de corte*) de un grafo es el número de aristas en su bosque de esqueleto:

$$\chi(G) = n - k.$$

El número de ciclos de base en un grafo G se determina por el *número ciclomático* (*rango cíclico*) del grafo $\nu(G)$.

Teorema 3.11 (teorema de Euler). *El número de ciclos de base de un grafo es constante e igual a su número ciclomático.*

Se denomina *sistema básico de ciclos* para un bosque de esqueleto D dado de un grafo G el conjunto de todos los ciclos del grafo G, cada uno de los cuales contiene solamente una cuerda de D. Este sistema forma base del espacio de ciclos. En el ejemplo considerado los ciclos R_1, R_2, R_3 son la base:

$C_b(G) =$

c	m	d	a	b	e	f	g	h	
1	0	0	0	1	0	0	1	1	R_1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	R_2
0	0	1	1	0	1	1	1	1	R_3
cuerdas			esqueleto D						

La matriz obtenida es la *matriz ciclomática de base* respecto al esqueleto D.

Cumpliendo $2^{\nu} - \nu - 1$ veces la operación de adición según el módulo dos sobre los ciclos de base obtenemos todo el conjunto de ciclos de este espacio. Escribamos el *sistema básico* de cortes para el grafo G y el árbol de esqueleto D representado en la fig. 3.7, *b*. $\{a, m, d\}$, $\{b, c\}$, $\{e, d\}$, $\{g, m, c, d\}$, $\{d, h, c\}$, $\{f, m, d\}$.

Este sistema se obtiene de modo siguiente. Se quita una arista del esqueleto D. Con esto, el conjunto de vértices se parte en dos subconjuntos no intersecantes V_1 y V_2. En G, el conjunto de todas las aristas, cada una de las cuales une el vértice de V_1 con el vértice de V_2 es un corte del grafo G. El conjunto de todos los cortes para cada arista del esqueleto D es el sistema básico de cortes para el esqueleto dado D.

El sistema básico de cortes forma base en el espacio de cortes o bien en el espacio de cociclos. Este sistema puede ser escrita en forma de una correspondiente *matriz básica de cortes o bien de una matriz cociclomática básica:*

$K_b(G) =$

a	*b*	*e*	*g*	*h*	*f*	*m*	*c*	*d*
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	1

esqueleto cuerdas

Cumpliendo $2^{\chi} - \chi - 1$ veces la operación de adición según el módulo dos sobre cociclos, engendramos todo el conjunto de cociclos (cortes) del grafo.

Al prefijar en el grafo las propiedades de los ciclos se puede definir la clase de los grafos. Examinemos, por ejemplo, los grafos de dos partes. Lámase *grafo de dos partes* $G(V_1, V_2)$ un grafo, cuyo conjunto de vértices se parte en dos subconjuntos no intersecantes V_1 y V_2 de tal modo que en G cada arista une dos vértices de subconjuntos distintos.

Para cerciorarse de que un grafo es de dos partes es suficiente comprobar sus ciclos.

Teorema 3.12. *Un grafo es de dos partes si, y sólo si, todos sus ciclos tienen longitud par (son pares).*

□Sea G un grafo de dos partes. Entonces el conjunto de sus vértices se descompone en subconjuntos V_1 y V_2. Examinemos cualquier vértice de V_1. Para obtener un ciclo que incluye este vértice, hay que pasar k veces por una arista de V_1 y V_2 y por otra, de V_2 a V_1. De este modo, en G, cualquier ciclo tiene $2k$ aristas, o sea, es par.

Sea ahora que todos los ciclos simples son pares; demostremos la afirmación inversa que G es un grafo de dos partes. Supongamos que G es un grafo conexo. Para cualquier vértice $v_i \in G$ designaremos mediante V_1 un conjunto de vértices que comprende v_i y todos los vértices que están a distancia de una longitud par de v_i; designaremos mediante V_2 el conjunto de los otros vértices, que se encuentran a distancia de una longitud impar de v_i. Sea ahora que tenemos dos vértices v_j, $v_k \in V_2$ unidos por una arista. Ya que entre v_i y v_j, así como entre v_i y v_k existe un número par de aristas, el ciclo que comprende la arista (v_j, v_k) y el vértice v_i es impar, empero esto contradice la condición según la cual todos los ciclos son pares. Por consiguiente, los vértices de V_2 no se unen entre sí. Se puede aducir una demostración análoga, si G tiene varios componentes de conexión. ■

En un grafo de dos partes no es obligatorio que cada vértice de V_1 se una con cada vértice de V_2. Sin embargo, si este hecho tiene lugar, el grafo se denomina *grafo completo de dos partes* y se denota por medio de $K_{m,n}$ donde m es el número de vértices de V_1, mientras que n, es el número de vértices de V_2. El grafo $K_{m,n}$ tiene $m + n$ vértices y mn aristas. El grafo completo de dos partes $K_{1,n}$ se denomina *grafo estelar* (estrella) y es un árbol. Señalemos que cualquier árbol es un grafo de dos partes. Con frecuencia el grafo de dos partes se llama *grafo de Kǫnig.*

§ 3.4. Diferenciación de los grafos y mografos

En el análisis matemático el concepto de la derivada caracteriza el grado de variación de una función al realizarse una variación pequeña de su argumento. El concepto de la derivada se basa en el del límite. En la matemática discreta no existe el concepto del límite, por esta razón es imposible trasladar mecánicamente el concepto de la derivada de la matemática continua a la discreta. Para resolver problemas de optimización de la matemática discreta, introduciremos el concepto de la derivada basado en el uso del concepto de la frecuencia de letras en las palabras de cierto modelo Ψ.

Antes de la definición formal de la derivada, examinemos el siguiente ejemplo. Sea dado un grafo G (fig. 3.8, *a*). Nos interesa la frecuencia de participación de las aristas en la formación de esqueletos del grafo G. El grafo G contiene 8 esqueletos y se puede caracterizar la frecuencia buscada, por ejemplo, por el número de inclusiones de cada una de las aristas en estos esqueletos. Por ejemplo, la arista *a* participa 5 veces en la formación de esqueletos; la arista *c*, 4 veces, etc. La frecuencia se caracterizará de modo más completo, si a la par con los números indicados anteriormente calcular números, cada uno de los cuales es igual al número de esqueletos que contienen dos aristas fijadas. Por ejemplo, las aristas *a* y *b* se contienen en dos esqueletos. Con más exactitud la frecuencia buscada de un par de

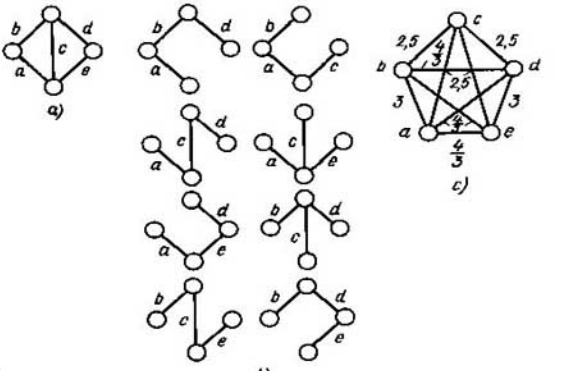


Fig. 3.8

aristas ϱ_i y ϱ_j se determina por el número de esqueletos que comprenden la arista ϱ_i o ϱ_j, pero no las comprenden simultáneamente en razón inversa con el número de esqueletos que contienen tanto la arista ϱ_i como la arista ϱ_j: $(f_i - 2f_{ij} + f_j)/f_{ij}$, donde f_i, f_j, f_{ij} son los números de esqueletos del grafo que contienen las aristas ϱ_i, ϱ_j, ϱ_i y ϱ_j, respectivamente.

Esta razón indica el grado de participación no uniforme de los pares de aristas en la formación de esqueletos del grafo.

A continuación nos acordemos llamar *suceso* S que ocurre cuando se cumplen determinadas condiciones al proceso examinado. En el ejemplo examinado el suceso S se representa por la «formación del esqueleto del grafo G por un conjunto de aristas», y las condiciones, por la inclusión de las aristas del grafo en el conjunto dado. El suceso S puede prefijarse por el correspondiente predicado.

Cada uno de los sucesos determina una matriz binaria bidimensional $Q = [q_{ij}]_{m \times n}$, a cada columna de la cual corresponde biunívocamente una condición, comprendida en un suceso, y a cada fila, una colección de condiciones, con las cuales el suceso tiene lugar (en las cuales el suceso es verdadero) y

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } j\text{-ésima condición se incluye en } i\text{-ésima colección de} \\ \quad \text{condiciones, en las cuales el suceso es verdadero;} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

En otras palabras, cada suceso determina un modelo, cuya matriz de incidencia es una matriz Q, o sea, las condiciones que se comprenden en el suceso son letras del modelo, las colecciones de condiciones, en las cuales el suceso es verdadero, son palabras del modelo.

La intensidad de participación de las condiciones (letras) en los sucesos (palabras) la caracterizaremos utilizando frecuencias de su inclusión. Para esto introduzcamos la matriz de frecuencia de relaciones $F = [f_{ij}]_{n\times n}$ que caracteriza un modelo Ψ, cuya matriz de incidencia es $Q(\Psi) = [q_{ij}]_{m\times n}$.

Se denomina *matriz de frecuencia de relaciones* $F = [f_{ij}]_{n\times n}$ una matriz, a cada fila (columna) de la cual le corresponde biunívocamente una letra, y un elemento f_{ij} es igual al número de palabras que comprenden las letras i y j, si $i \neq j$, en el caso contrario ($i = j$) equivale al número de palabras que incluyen la letra i. Con ello, si $i = j$, f_i es la *frecuencia propia de la letra*, si $i \neq j$, f_{ij} es la *frecuencia recíproca* de las letras i y j.

De la definición de la matriz de frecuencia de relaciones $F = [f_{ij}]_{n\times n}$ se desprende que ésta es simétrica respecto a la diagonal principal, es decir, $f_{ij} = f_{ji}$, y que la frecuencia propia de cualquier letra no es menor que la frecuencia recíproca de esta letra con cualquier otra letra: $f_i \geqslant f_{ij}$.

Se puede mostrar que una matriz de frecuencia de relaciones F que caracteriza un modelo con la matriz de incidencia Q satisface la relación

$$Q^T \times Q = F, \tag{3.9}$$

donde Q^T es la matriz transpuesta (Q^T es el signo de la matriz transpuesta).

Determinemos el grado de participación de los componentes del grafo G en un suceso S dado con anticipación en el grafo G, en otras palabras, el grado de heterogeneidad de componentes del grafo respecto al suceso prefijado. Caracterizaremos esta heterogeneidad por la derivada $\partial G/\partial S$ del grafo G respecto al suceso S.

Llámase *derivada* $\partial G/\partial S$ *de un grafo* G *respecto a un suceso* S un grafo ponderado no orientado $\langle V, (U, P)\rangle$, cuyo portador coincide con el portador de un modelo determinado por este suceso y un par de vértices (v_i, v_j) está ponderado por la razón de la frecuencia $(f_i - f_{ij}) + (f_i - f_{ij})$ de su participación incompatible a la frecuencia f_{ij} de la participación compatible en el suceso S:

$$\frac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}, \tag{3.10}$$

con la particularidad de que

$(v_i, v_j) \notin U$, si $\dfrac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = \infty$;

$(v_i, v_j) \in U$, si $\dfrac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j)$ es la magnitud finita diferente de cero;

$v_i = v_j$, si $\dfrac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = 0$.

El valor de la expresión (3.10) se llama *valor de la derivada* sobre la arista (v_i, v_j).

Ilustremos el concepto de derivada de un grafo respecto a un suceso con dos ejemplos.

Ejemplo 3.3. Sean prefijados un grafo G (fig. 3.8, *a*) y un suceso S, «formación del esqueleto del grafo G por las aristas». Hallemos la derivada del grafo G según el suceso S que caracterizará la intensidad de participación de aristas en la formación de esqueletos del grafo G.

El suceso prefijado determina un modelo, cuya matriz de incidencia tiene siguiente forma.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

En esta matriz, a cada columna le corresponde biunívocamente una arista del grafo G (la condición comprendida en el suceso), a cada fila, una colección de aristas que forman un esqueleto del grafo (la colección de condiciones, en las cuales el suceso prefijado tiene lugar) (fig. 3.8, *b*).

La matriz de frecuencia de relaciones F que corresponde a la matriz Q es

$$F = Q^T \times Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

Los elementos de esta matriz determinan $\frac{\partial G}{\partial S}$ que es un grafo con portador $\{a, b, c, d, e\}$ y dos vértices de este grafo son adyacentes, si el valor de la derivada sobre el arco formado por estos vértices es distinto de cero y del infinito. Calculando los valores de la derivada sobre las aristas del grafo $\frac{\partial G}{\partial S}$:

$$\frac{\partial G}{\partial S}(a, b) = \frac{f_a - 2f_{ab} + f_b}{f_{ab}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 3,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S}(a, c) = \frac{f_a - 2f_{ac} + f_c}{f_{ac}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 4}{2} = 2{,}5,$$

.....

$$\frac{\partial G}{\partial S}(d, e) = \frac{f_d - 2f_{de} + f_e}{f_{de}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 3,$$

obtenemos el grafo $\frac{\partial G}{\partial S}$ (fig. 3.8, *c*).

Ejemplo 3.4. Examinemos un grafo G (fig. 3.9, *a*), sobre el cual está prefijado un suceso S, «formación por aristas de un ciclo de base respecto a un esqueleto G' (fig. 3.9, *b*) del grafo G». Calculemos la derivada del grafo G respecto al suceso S.

El número ciclomático $\nu(G)$ del grafo G es igual a 3:

$$\nu(G) = m - n + k = 7 - 5 + 1 = 3.$$

Por consiguiente, el grafo contiene tres ciclos de base. El suceso S determina un modelo de tipo.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & g & h \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

A este modelo le corresponde la matriz de frecuencia de relaciones

$$F = Q^T \times Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & g & h \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ g \\ h \end{array}$$

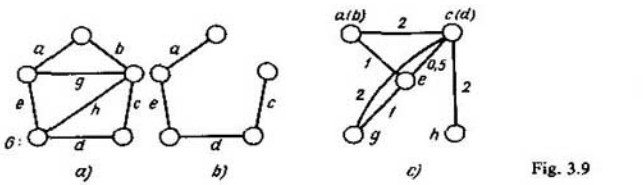
Calculando el valor de la derivada obtenemos el grafo $\frac{\partial G}{\partial S}$ (fig. 3.9, *c*). Analizando el grafo $\frac{\partial G}{\partial S}$ fijemos que, por ejemplo, las aristas *c* y *d* (*a* y *b*) participan de manera igualmente intensa en el suceso prefijado.

De tal modo, para determinar la derivada de un grafo G según el suceso S es necesario:

a) constriur un modelo determinado por el suceso prefijado;

b) hallar la matriz de frecuencia de relaciones que corresponde a este modelo;

c) calculando los valores de la derivada $\frac{\partial G}{\partial S}$ sobre aristas del grafo por la matriz de frecuencia de relaciones construir el grafo buscado $\frac{\partial G}{\partial S}$ que caracteriza la intensidad de participación de elementos del grafo G en el suceso prefijado S.



a) b) c)

Fig. 3.9

Llámase derivada $\frac{\partial^k G}{\partial S^k}$ de orden k según el suceso S la derivada de la derivada de orden $k-1$ según aquel mismo suceso S:

$$\frac{\partial^k G}{\partial S^k} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial^{k-1} G}{S^{k-1}}\right).$$

Se denomina derivada mixta según los sucesos S_a y S_b la derivada según el suceso S_a de la derivada según el suceso S_b:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S_a \partial S_b} = \frac{\partial}{\partial S_a}\left(\frac{\partial G}{\partial S_b}\right).$$

De modo análogo se determinan derivadas mixtas del grafo G según los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

El concepto introducido de la derivada de un grafo G según el suceso S posibilita hallar también la derivada de un modelo $\Psi(Q)$ (de un mografo $G^{(M)}(Q)$). En el caso de determinar la derivada de un modelo, si no se da otra indicación sobre el suceso S, en calidad de S consideramos la «formación de una palabra por letras».

El valor de la derivada del modelo (del mografo $G^{(M)}(Q)$) sobre un par (i, j) es

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S}(i, j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}},$$

donde las frecuencias f_i, f_{ij} y f_j se determinan por la matriz de frecuencia de relaciones $F = [f_{ij}]$ $(F = Q^T \times Q)$. Sobre el mografo $G^{(M)}$, las frecuencias f_i, f_{ij} y f_j son iguales al número de pesos del vértice v_i, al número de pesos comunes de los vértices v_i, v_j y al número de pesos del vértice v_j, respectivamente.

Ejemplo 3.5. Calculemos

$$\frac{\partial^2 G^{(M)}}{\partial S_1 \partial S_2}((v_1, v_2), (v_2, v_3)),$$

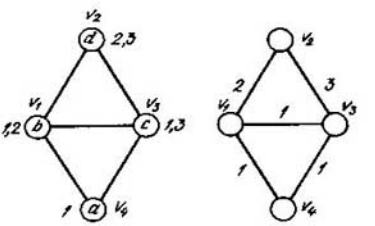


Fig. 3.10

donde el mografo $G^{(M)}$ está prefijado en la fig. 3.10, *a*, el suceso S_1 es el suceso en el mografo, en el entendimiento habitual (o sea, la «formación de una palabra por letras»); el suceso S_2 es la «formación de un ciclo de longitud impar en el grafo $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1} = \langle V, U \rangle$.»

La matriz de incidencia Q_1 que prefija el mografo $G^{(M)}$ (fig. 3.10, *a*) tiene forma

$$Q_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array}.$$

Le corresponde la matriz de frecuencia de relaciones $F = Q^T \times Q$:

$$F_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| \end{array}.$$

Los valores de la derivada $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}$ son, respectivamente, iguales a:

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(a, b) = 1; \frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(b, c) = 2;$$

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(a, c) = 1; \frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(b, d) = 2;$$

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(a, d) = \infty; \frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(c, d) = 2.$$

El grafo $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}$ se representa el la fig. 3.10, *b*. En el grafo $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}$ el suceso S prefija la matriz Q_2 de tipo

$$Q_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} (v_1, v_2) & (v_2, v_3) & (v_1, v_3) & (v_3, v_4) & (v_1, v_4) \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array}$$

En virtud del algoritmo del hallazgo de la derivada del grafo, obtenemos

$$F_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} (v_1, v_2) & (v_2, v_3) & (v_1, v_3) & (v_3, v_4) & (v_1, v_4) \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array}$$

y

$$\frac{\partial^2 G^{(M)}}{\partial S_1 \partial S_2}((v_1, v_2), (v_2, v_3)) = \frac{1 - 2 \cdot 1 + 1}{1} = 0.$$

Hemos examinado la uniformidad de participación de los pares de elementos en el suceso S. De modo análogo puede ser examinada la uniformidad de participación de ternas, cuaternas, . . ., n-ternas de elementos en

el suceso S. Para deducir la fórmula de la derivada sobre tres, cuatro, . . ., n elementos generalizaremos el concepto de la matriz de frecuencia de relaciones. Introduzcamos el concepto de la hipermatriz de frecuencia de relaciones.

Examinemos el modelo $\Psi = \langle M, S_1, S_2, \ldots, S_k \rangle$. Tomemos una matriz N-dimensional $F = [f_{i_1 i_2 \ldots i_N}]$, $i_1, i_2, \ldots, i_N = 1, \ldots, |M|$. Las posiciones según cada dimensión de la matriz N-dimensional las enumeremos con números de la serie natural 1, 2, . . ., $|M|$. Pongamos en correspondencia biunívoca a cada letra $m \in M$ un número de esta serie natural y colocaremos las letras $m_i \in M$ por las respectivas posiciones de cada dimensión de la matriz N-dimensional. Cada elemento $f_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ de esta matriz es igual al número de palabras que comprenden letras correspondientes a los números $i_1, i_2, \ldots, i_N$. No duplicamos los índices iguales por su escritura. La matriz formada de este modo se denominará *matriz N-dimensional de frecuencia de relaciones* o bien *hipermatriz de frecuencia de relaciones*, si no nos interesa la dimensión de esta matriz.

Si entre los índices $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_N$ y un elemento $f_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ existen al menos dos índices de escritura distinta este elemento se llama *frecuencia recíproca* de letras correspondientes y, en caso contrario, *frecuencia propia* de estas letras. La frecuencia $f_{i_1, i_2, \ldots, i_N}$ que tiene k índices diferentes se denomina *frecuencia de orden k*.

Cuando se calculaba la derivada de un par de elementos se utilizaban frecuencias de primer y segundo orden.

La derivada $\frac{\partial G}{\partial S}$ de un grafo G respecto a un suceso S sobre las ternas de elementos es

$$\frac{\partial G}{\partial S}(m_a, m_b, m_c) = \frac{1}{f_{m_a m_b m_c}} \cdot \left(\sum_{i = m_a, m_b, m_c} f_i - 2 \cdot \sum_{i \neq j, i, j = m_a, m_b, m_c} f_{ij} + \right.$$

$$\left. + 3 \cdot \sum_{\substack{i \neq j, i \neq k, j \neq k \\ i, j, k = m_a, m_b, m_c}} f_{ijk} \right). \qquad (3.11)$$

La derivada $\frac{\partial G}{\partial S}$ del grafo G respecto a un suceso S sobre las cuaternas de elementos es

$$\frac{\partial G}{\partial S}(m_a, m_b, m_c, m_d) = \frac{1}{f_{m_a m_b m_c m_d}} \cdot \left(\sum_i f_i - 2 \cdot \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} f_{ij} + 3 \cdot \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j, i \neq k, j \neq k}} f_{ijk} - \right.$$

$$\left. - 4 \cdot \sum_{\substack{i,j,k,l \\ i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k \neq l}} f_{ijkl} \right), \quad i, j, k, l = m_a, m_b, m_c, m_d. \qquad (3.12)$$

La derivada $\frac{\partial G}{\partial S}$ de un grafo G respecto a un suceso S sobre n elementos es

$$\frac{\partial G}{\partial S}(m_1, m_2, \ldots m_n) = \frac{1}{f_{m_1 m_2 \ldots m_n}} \cdot \left(\sum_{i_1} f_{i_1} - 2 \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ i_1 \neq i_2}} f_{i_1 i_2} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\alpha+1} \cdot \alpha \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_\alpha \\ i_1 \neq i_2, \ldots, i_{\alpha-1} \neq i_\alpha}} f_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n \\ i_1 \neq i_2, \ldots, i_{n-1} \neq i_n}} f_{i_1 i_2 \ldots i_n} \right),$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_n = m_1, m_2, \ldots, m_n. \qquad (3.13)$$

Las fórmulas (3.11)—(3.13) están deducidas de la definición de la derivada $\frac{\partial G}{\partial S}$ de un grafo G respecto a un suceso S, al examinar las ternas, cuaternas y n-ternas de elementos, respectivamente.

Cada modelo puede ser prefijado con ayuda de una hipermatriz de frecuencia de relaciones.

Por ejemplo, un modelo $\Psi = \langle M, S_3 \rangle$,

$M = \{a, b, c, d, e\}$,

$S_3 = \{\{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$,

cuya matriz de incidencia

$$Q(\Psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

puede determinarse por la matriz de frecuencia de relaciones

$$F(\Psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

En el ejemplo examinado $Q(\Psi)$ y $F(\Psi)$ determinan biunívocamente una a otra. En otras palabras, un modelo puede ser prefijado no sólo enumerando sus palabras, sino también cuando se prefijan intersecciones de estas palabras con ayuda de planteamiento de las frecuencias de letras en estas palabras).

Si tenemos gran número de ceros es cómodo representar la hipermatriz de frecuencia de relaciones en forma de anotación en línea. Por ejemplo,

el modelo a examinar Ψ puede ser escrito como

$$F(\Psi) = a^2 \circ 2b^2 \circ 2c^2 \circ 3d^2 \circ e^2 \circ ab \circ ad \circ bc \circ 2bd \circ 2cd \circ ce \circ de.$$

Aquí el coeficiente para α^2 es igual a f_α y para $\alpha\beta$, $f_{\alpha\beta}$, α, $\beta = a, b, c, d, e$; el símbolo $\circ$ es distribuidor constructivo de dos frecuencias.

La anotación en línea de una hipermatriz de frecuencia de relaciones que prefija el modelo se denominará a continuación *descomposición del modelo por frecuencias* o bien *descomposición de frecuencia del modelo.*

§ 3.5. Estabilidad, cubrimientos y combinaciones en pares

En cualquier grafo se puede formar una colección de ciertos conjuntos que se unen según algún criterio, por ejemplo, subconjuntos de vértices tales en los que no hay dos vértices de un mismo subconjunto que sean adyacentes. Análogamente se puede partir un grafo en subconjunto de aristas de tal modo que las aristas de un subconjunto sean no adyacentes de dos en dos. En el caso general, el número de elementos en distintos subconjuntos es distinto y existe un subconjunto, en que el número de elementos adquiere el máximo valor. Por eso se puede introducir dos invariantes del grafo para vértices no adyacentes de dos en dos y aristas del mismo tipo.

Un conjunto de vértices se denomina *interiormente estable,* si éstos son no adyacentes de dos en dos.

Un conjunto interiormente estable de vértices se denomina *subgrafo vacío* si, al añadir aunque no sea más que un vértice no perteneciente a este conjunto, se forma por lo menos una arista (un arco).

La potencia maximal de un subgrafo vacío del grafo G se denomina *número de estabilidad interior* o *número vértice de independencia del grafo* $\varepsilon_0(G)$.

El número maximal de aristas no adyacentes de dos en dos de un grafo G se denomina *número arista de independencia del grafo* $\varepsilon_1(G)$.

Si una arista es incidente a un vértice se dice que ellos cubren uno a otro. Un conjunto de vértices que cubren todas las aristas de un grafo se denomina *cubrimiento vértice* del grafo G. La potencia minimal del cubrimiento vértice se llama *número del cubrimiento vértice del grafo* $\pi_0(G)$. Análogamente un conjunto de aristas que cubren todos los vértices del grafo G se denomina *cubrimiento arista* de un grafo. La potencia minimal del cubrimiento arista del grafo G se denomina *número del cubrimiento arista* $\pi_1(G)$.

Acordémonos considerar que cualquier vértice de un grafo cubre a si mismo y dos vértices adyacentes cubren uno a otro. Entonces la potencia minimal de un conjunto de vértices que cubren todos los vértices del grafo G se llama *número vértice de la estabilidad exterior del grafo* $\beta_0(G)$.

De manera análoga consideremos que cada arista de un grafo cubre

a si misma y dos aristas adyacentes cubren una a otra; entonces la potencia minimal de un conjunto de aristas que cubren todas las aristas del grafo G se denomina *número arista de la estabilidad exterior* $\beta_1(G)$.

Para resolver muchos problemas prácticos es necesario calcular los invariantes examinados del grafo. Por ejemplo, sea que los vértices de un grafo son los módulos tecnológicos de un proceso automatizado flexible y hay que observarlos continuamente, mientras que dos vértices del grafo se unen por una arista, si se puede observar sus respectivos módulos encontrándose al lado de uno de ellos. Se necesita colocar telecámaras de tal modo que el operador del monitor en el panel de control pueda observar todos los módulos con tal que el número de telecámaras sea mínimo. Para resolver este problema hay que determinar el número de vértice de la estabilidad exterior del grafo dado.

Ejemplo 3.6. Para el grafo de Peterson G (véase la fig. 3.4), los invariantes introducidos tienen siguientes valores:

$\varepsilon_0(G) = 4$, $|\{1, 3, 9, 10\}| = 4$; $\varepsilon_1(G) = 5$, $|\{a, d, n, x, y\}| = 5$;
$\pi_0(G) = 6$, $|\{1, 3, 5, 7, 8, 9\}| = 6$; $\pi_1(G) = 5$, $|\{k, m, n, p, r\}| = 5$;
$\beta_0(G) = 3$, $|\{1, 4, 10\}| = 3$; $\beta_1(G) = 4$, $|\{a, c, x, u\}| = 4$.

Teorema 3.13. *Para cualquier grafo conexo no trivial* $G = \langle V, U\rangle$ se tiene

$$\varepsilon_0(G) + \pi_0(G) = \varepsilon_1(G) + \pi_1(G) = |V|. \tag{3.14}$$

Un conjunto de aristas de un grafo, en el cual ningún par de aristas es adyacente se denomina *combinación en par* del grafo. Un conjunto de aristas de una combinación en par, en la cual el número de aristas es igual a ε_1 se denomina *combinación máxima en par* del grafo.

Para los grafos de dos partes es válido el siguiente teorema sobre combinaciones en par.

Teorema 3.14 (teorema de König). *Para un grafo de dos partes G, el número de aristas en la combinación máxima en par es igual al número del cubrimiento de vértice, o sea,* $\varepsilon_1 = \pi_0$.

Llámase *combinación perfecta en par* de V_1 en V_2 en grafo de dos partes $G(V_1, V_2)$ una correspondencia biunívoca entre los vértices de V_1 y un subconjunto de vértices de V_2, en la cual todo vértice de V_1 se une con un vértice de V_2 mediante una arista.

El concepto de combinación en par permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.15 (teorema de Hall). *Sea* $G = G(V_1, V_2)$ *un grafo de dos partes y para cualquier subconjunto* $A \subset V_1$ *sea también* $\varphi(A)$ *un conjunto de aquellos vértices de* V_2 *que son adyacentes por lo menos a un vértice de A. Entonces la combinación perfecta en par de* V_1 *en* V_2 *existe cuando, y sólo cuando, el número de elementos* $|A| \leqslant |\varphi(A)|$ *para cada subconjunto* $A \in V_1$.

Examinemos como se escogen subgrafos vacíos $\{E_i\}$ en un grafo G. Se llama *entorno* $G(v_0)$ *de un vértice* v_0 *del grafo* $G = \langle V, \Gamma \rangle$ un subgrafo $\langle V_0, U_0 \rangle$, cuyo portador coincide con el entorno de radio unitario de este vértice, $V_0 = \Gamma v_0$ y la signatura U_0 está formada por todas las aristas del grafo G que unen los vértices de V_0.

Llámase *no entorno* $\overline{G}(v_0)$ del vértice v_0 del grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ un subgrafo $\langle \overline{V}_0, \overline{U}_0 \rangle$, cuyo portador $\overline{V}_0 = \{v_i / v_i \in \Gamma v_0\}$ y la signatura $\overline{U}_0$ comprende todas las aristas del grafo G que unen los vértices de $\overline{V}_0$.

Teorema 3.16. *Un subgrafo vacío* $G = \langle V, \Gamma \rangle$ *que no contiene el vértice* $v_0 \in V$ *comprende al menos un vértice de su entorno.*

Reduzcamos la formación de subgrafos vacíos en un grafo G prefijado a la construcción de un árbol, en el cual todo camino entre un vértice pendiente (vértice v de la potencia igual a 1) y el fin de un arco que parte de la raíz, se compone de vértices que forman un subgrafo vacío donde la raíz es un vértice que no es el fin de ningún arco.

En virtud del teorema 3.16 construyamos este árbol del modo siguiente:

1) pongamos el grafo prefijado en correspondencia a la raíz del árbol;

2) fijemos un vértice arbitrario v_0 del grafo dado $G = \langle V, \Gamma \rangle$ y los vértices de su entorno V_0. Pongamos un vértice del conjunto $\{v_0, V_0\}$ en correspondencia biunívoca al fin de todo arco que parte de la raíz del árbol;

3) cada extremo v_α de arcos construidos ponderemos por el no entorno $\overline{G}(v_\alpha)$ del vértice v_α;

4) consideremos el extremo v_α del nivel construido como raíz de un árbol nuevo.

Repetiremos los puntos 2)—4) hasta que cada extremo de arcos construidos sea ponderado por el símbolo $\varnothing$. Este símbolo significa la ausencia del no entorno correspondiente. Según el teorema 3.16 el camino entre el fin de un arco que parte de la raíz del árbol construido y un vértice pendiente ponderado por el símbolo $\varnothing$ consta de los vértices del grafo vacío.

En el caso de fijar arbitrariamente un vértice cuando se construye un nivel del árbol no se puede establecer la correspondencia biunívoca entre los vértices pendientes y subgrafos vacíos, puesto que los últimos pueden repetirse, es decir, un mismo subgrafo vacío puede ponderar varios vértices pendientes. Para evitar la repetición de subgrafos vacíos, introduzcamos la ley de absorción de subárboles.

Ley de absorción. *Si en el k-ésimo nivel de un árbol los vértices* v_i *y* v_j *son no adyacentes y un subárbol de la raíz* v_i *está construido y si en un subárbol de la raiz* v_j *aparece un arco con el vértice* v_i, *la rama correspondiente no se construye.*

La ley es válida, ya que el subárbol de la raíz v_j no contiene el vértice v_α del entorno del vértice v_i, $v_\alpha \in G(v_i)$, y, en virtud del teorema 3.16, se contiene en un subgrafo vacío del subárbol ya construido de la raíz v_i.

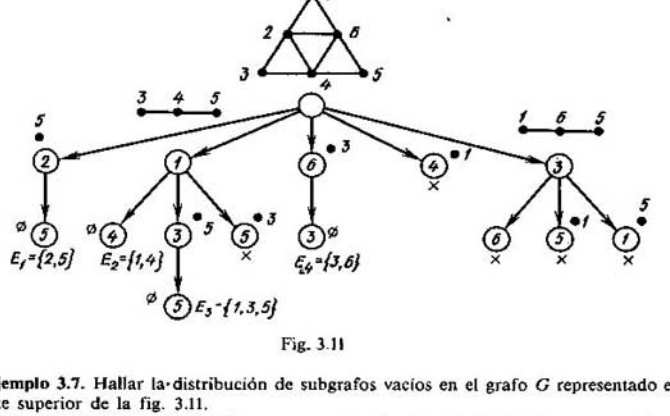


Fig. 3.11

Ejemplo 3.7. Hallar la distribución de subgrafos vacíos en el grafo G representado en la parte superior de la fig. 3.11.

Pongamos el grafo prefijado G en correspondencia a la raíz del árbol que se construye. Fijemos el vértice v_2. Su entorno consta de cuatro vértices $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, por eso de la primera raíz trazamos cinco arcos. Añadimos a los extremos de los arcos uno de los vértices y ponderamos los arcos por el no entorno de estos vértices (fig. 3.11). El no entorno $G(v_2)$ contiene solamente el vértice v_5, por eso en el tercer nivel obtenemos el vértice pendiente v_5. El vértice v_1 tiene un no entorno con el portador $\{v_3, v_4, v_5\}$. Fijamos el vértice v_4. Su no entorno $\overline{V_4} = \varnothing$, por esta razón en el tercer nivel obtenemos el vértice pendiente v_4. Formamos dos más arcos de la segunda raíz v_1: con el vértice v_3 y el no entorno compuesto de v_5 y con el vértice v_5 y el no entorno v_3. Según la ley de absorción, uno de los subárboles se absorbe. En la figura, la cruz significa que la rama no sigue construyéndose y no se tiene en cuenta cuando se calculan subgrafos vacíos. En el cuarto nivel obtenemos el vértice pendiente v_5. Para un vértice del segundo nivel tenemos el no entorno compuesto del vértice v_3 y el proceso se termina por el vértice v_3 en el tercer nivel.

El vértice v_4 del segundo nivel con su no entorno se trunca según la ley de absorción. Para el vértice v_3 con el no entorno $\overline{V_3} = \{v_1, v_5, v_6\}$ construyamos el tercer nivel. Obtenemos tres raíces: v_6, $v_1(v_5)$, $v_5(v_1)$. Todos ellos se truncan según la ley de absorción y no se tienen en cuenta cuando se calculan subgrafos vacíos.

De tal modo, tenemos los subgrafos vacíos:

$E_1 = \{2, 5\}$, $E_2 = \{1, 4\}$, $E_3 = \{1, 3, 5\}$ y $E_4 = \{3, 6\}$.

Establezcamos las propiedades de un grafo que determinan el carácter ramificado del árbol que sintetizamos. En el ejemplo examinado, cuando se construía el siguiente nivel, en cada raíz se fijó un vértice de la potencia maximal. Para eliminar la repetición cinco veces de subgrafos vacíos en el árbol fue utilizada la ley de absorción. En el primer paso de la construcción del árbol fijemos un vértice no de la potencia maximal, sino el de la minimal: el vértice v_1, $s(v_1) < s(v_2)$. Al construir el árbol después de fijar el vértice v_1 (fig. 3.12, *a*) vemos que es más simple que el anterior; en su construcción la ley de absorción se utilizaba sólo una vez. Si en la construc-

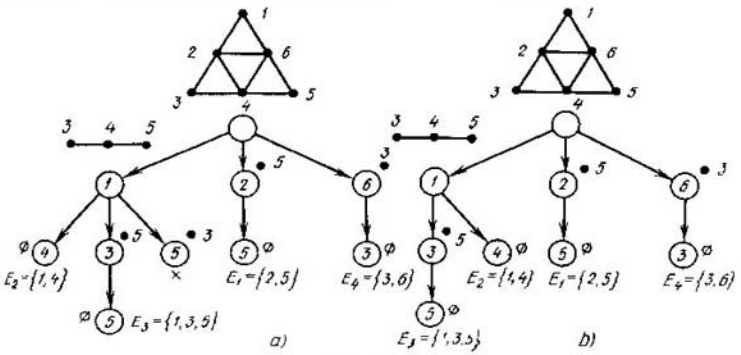


Fig. 3.12

ción del siguiente nivel en cada raíz fijamos el vértice de la potencia minimal (fig. 3.12, *b*), en el ejemplo considerado el número de vértices pendientes coincide con el número de subgrafos vacíos, incluso sin emplear la ley de absorción. Expongamos un algoritmo de engendrar todos los subgrafos vacíos, en el cual para reducir la densidad del trabajo, fijaremos cada vez el vértice de la potencia minimal.

1. Ponemos un grafo prefijado G en correspondencia a la raíz del árbol a sintetizar.

2. En el grafo, fijamos el vértice v_0 de la potencia minimal, poniéndola en correspondencia al extremo del arco que parte de la raíz. Construimos $|\Gamma v_0|$ de arcos que parten de la raíz y el extremo de cada uno de ellos ponemos en correspondencia biunívoca a un vértice del entorno $G(v_0)$.

3. Cada extremo v_α de los arcos construidos lo ponderamos por el no entorno $\overline{G}(v_\alpha)$ del vértice v_α del grafo puesto en correspondencia a la raíz examinada.

4. Analizamos el extremo v_α del nivel construido como la raíz de un árbol nuevo.

5. Consideramos, si el vértice v_α es ponderado por el símbolo $\varnothing$. Si «no», pasamos al punto 2, si «sí», al punto 6.

6. Los caminos entre los extremos de los arcos que parten de la raíz del árbol sintetizado y los arcos pendientes determinan unívocamente los subgrafos vacíos del grafo prefijado.

A base de este algoritmo, se puede determinar el número de estabilidad interior $\varepsilon_0(G)$ del grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ como potencia maximal de un subgrafo vacío $\varepsilon_0(G) = \max_i |E_i|$ y el número del cubrimiento vértice $\pi_0(G)$ como diferencia $|V| - \varepsilon_0(G)$ (en virtud del teorema 3.13).

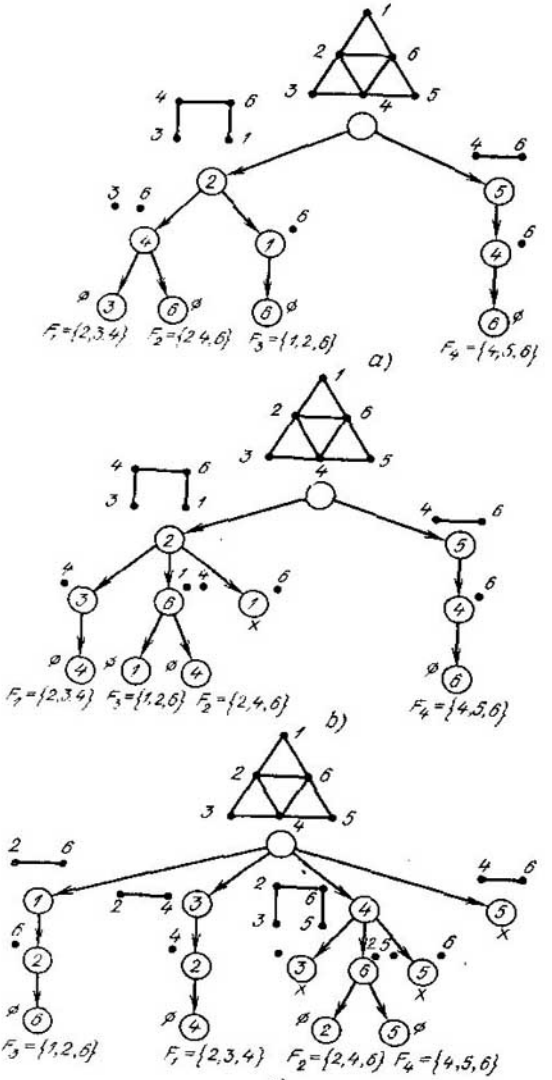

F1={2,3,4}
F2={2,4,6}
F3={1,2,6}
F4={4,5,6}
a)
F3={1,2,6}
F1={2,3,4}
F2={2,4,6}
F4={4,5,6}
b)
F3={1,2,6}
F1={2,3,4}
F2={2,4,6}
F4={4,5,6}
c)

Fig. 3.13

Para el ejemplo examinado $\varepsilon_0(G) = 3$, $E_{\text{máx}} = \{1, 3, 5\}$; $\pi_0(G) = 3$, $|\{2, 4, 6\}| = 3$.

En el grafo, muchas veces se necesita determinar no el número maximal de los vértices, entre los cuales faltan conexiones, sino, al contrario, el número maximal de los vértices adyacentes de dos en dos. Se denomina *densidad* $p(G)$ de un grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ la potencia maximal del portador de un subgrafo completo $F_{\text{máx}} \subset G$:

$$p(G) = \max_i p(F_i).$$

El algoritmo para engendrar subgrafos vacíos, aducido anteriormente, y la ley de absorción pueden utilizarse con éxito, después de hacer correspondientes cambios para determinar la densidad $p(G)$ del grafo G.

Expongamos un *algoritmo para engendrar subgrafos completos.*

1. Ponemos un grafo prefijado en correspondencia a la raíz del árbol que sintetizamos.

2. En el grafo fijamos el vértice v_0 con la potencia maximal, poniéndola en correspondencia al extremo de un arco que parte de la raíz. Construimos $|\overline{\Gamma v_0}|$ arcos que parten de la raíz ($|\overline{\Gamma v_0}|$ es la potencia del portador del no entorno del vértice v_0). El extremo de cada uno de estos arcos se pone en correspondencia biunívoca a un vértice del no entorno $\overline{G(v_0)}$.

3. Cada extremo v_α de los arcos construidos se pondera por el entorno $G(v_\alpha)$ del vértice v_α del grafo puesto en correspondencia a la raíz que analizamos.

4. Consideramos el fin v_α del nivel construido como la raíz de un árbol nuevo.

5. Establecemos, si el vértice v_α es ponderado por el símbolo $\varnothing$. Si «no», pasamos al punto 2, si «sí», al punto 6.

6. Los caminos entre los extremos de los arcos que parten de la raíz del árbol sintetizado y los arcos pendientes determinan unívocamente los subgrafos completos del grafo prefijado.

La ley de absorción. *Si en el k-ésimo nivel de un árbol los vértices v_i y v_j son adyacentes, el subárbol de la raíz v_i está construido y si en el subárbol de la raíz v_j aparece un arco con el vértice v_i, la rama correspondiente no se construye.*

Ejemplo 3.8. Hallemos la distribución de subgrafos completos en el grafo G representado en la mitad superior de la fig. 3.13. Al fijar, en el punto 2, un vértice de la potencia maximal en cada nivel sintetizado (fig. 3.13, *a*), no se repitieron los subgrafos completos en el árbol. Si en el punto 2 fijamos un vértice de la potencia no maximal, tenemos la repetición de los subgrafos completos. Cuando fijamos el vértice v_2, de la potencia minimal v_3 $s(v_3) = 1$, en la construcción del segundo nivel tenemos la repetición del subgrafo completo $F_3 = \{1, 2, 6\}$ (fig. 3.13, *b*); en la construcción de cada nivel, el número de repeticiones aumenta todavía más: $F_1 = \{2, 3, 4\}$, $F_4 = \{4, 5, 6\}$, $F_4 = \{4, 5, 6\}$ (fig. 3.13, *c*). La densidad del grafo considerado G es igual a 3.

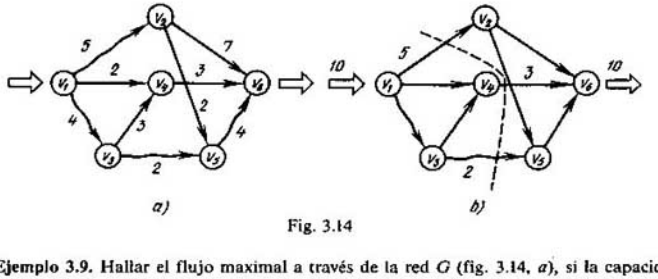


Fig. 3.14

Ejemplo 3.9. Hallar el flujo maximal a través de la red G (fig. 3.14, *a*), si la capacidad de los arcos es, respectivamente, igual a: $a = (v_1, v_2) - 5$, $b = (v_1, v_4) - 2$, $c = (v_1, v_3) - 4$, $d = (v_3, v_4) - 3$, $e = (v_3, v_5) - 2$, $k = (v_5, v_6) - 4$, $m = (v_4, v_6) - 3$, $n = (v_2, v_6) - 7$, $p = (v_2, v_5) - 2$.

Para determinar el flujo maximal a través de una red prefijada construimos el grafo de alcance $G_g = \langle V_g, U_g \rangle$, cada vértice del cual corresponde biunívocamente a un arco del grafo prefijado G y dos vértices se unen por una arista si, y sólo si, sus arcos correspondientes se incluyen en el camino en el grafo de partida G (fig. 3.15, *a*). Entonces un subgrafo vacío del grafo de alcance determina biunívocamente un corte de la red de partida. La suma mínimal de las capacidades de los arcos incluidos en el corte es igual, en virtud del teorema 3.10, al flujo maximal buscado. Empleando el algoritmo para engendrar todos los subgrafos vacíos los formamos en el grafo de alcance (fig. 3.15, *b*) y calculamos la capacidad del corte. Tenemos:

$E_1 = \{n, p, b, e, d\} - 7 + 2 + 2 + 2 + 3 = 16$, $E_2 = \{n, p, b, c\} - 7 + 2 + 2 + 4 = 15$,

$E_3 = \{n, p, m, e\} - 7 + 2 + 3 + 2 = 14$, $E_4 = \{n, k, b, d\} - 7 + 4 + 2 + 3 = 16$,

$E_5 = \{n, k, m\} - 7 + 4 + 3 = 14$, $E_6 = \{a, b, d, e\} - 5 + 2 + 3 + 2 = 12$,

$E_7 = \{a, b, c\} - 5 + 2 + 4 = 11$, $E_8 = \{a, m, e\} - 5 + 3 + 2 = 10$.

El corte $\{a, m, e\}$ con la capacidad mínimal igual a 10 determina el flujo maximal $\Phi_{\text{máx}} = 10$ a través de la red G.

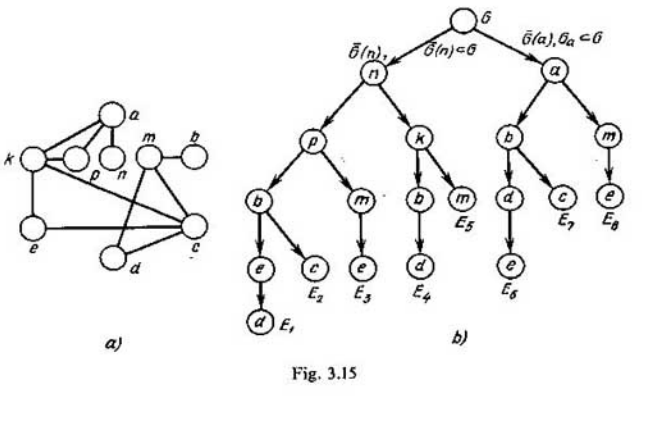


Fig. 3.15

Se denomina *matriz modificada de adyacencia* S la disyunción de la matriz de adyacencia S y la matriz diagonal unitaria $\{1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\bar{S} = S \vee \{1, 1, \ldots, 1\}.$$

La determinación del número de estabilidad exterior se reduce a la construcción de la matriz modificada de adyacencia y a la formación del cubrimiento con el número minimal de elementos.

Ejemplo 3.10. Determinemos el número vértice de la estabilidad exterior $\beta_0(G)$ de un grafo G (fig. 3.16), cuya matriz $\bar{S}(G)$ tiene siguiente forma:

$$\bar{S}(G) = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Cubrimos filas por columnas o columnas por filas de la matriz de adyacencia que es equivalente en virtud de su simetría con respecto a su diagonal principal. Empleando el algoritmo de Petrick obtenemos

$$(a + c + f)\cdot(b + c + d + f)\cdot(a + b + c + d + e)\cdot(b + c + d + f)(c + e + f) \times$$
$$\times (a + b + d + e + f) = (c + f + ae)(a + b + d + e + cf)(b + c + d + f) =$$
$$= (c + f + ae)(b + d + ac + cf + af + ce + ef) = bc + cd + ac + cf + ce +$$
$$+ bf + df + af + ef + abe + ade.$$

Cada término multiplicativo de la expresión obtenida determina un conjunto exteriormente estable de vértices; la potencia minimal de este conjunto es igual al número vértice de la estabilidad exterior $\beta_0(G)$, $\beta_0(G) = 2$.

En el caso de un grafo orientado, excepto el número de vértice de la estabilidad exterior $\beta_0(G)$ del grafo G se distinguen los números vértice de la estabilidad exterior positivo $\beta_0^+(G)$ y negativo $\beta_0^-(G)$.

Se denomina *número vértice positivo de la estabilidad exterior* $\beta_0^+(G)$ de un grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ la potencia minimal de un conjunto de vértices $V^+ = \{v_i^+\}$ tal que

$$\{v_i^+\} \cup \{\Gamma v_i^+\} = V, \tag{3.15}$$

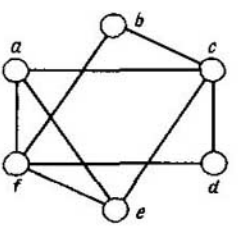


Fig. 3.16

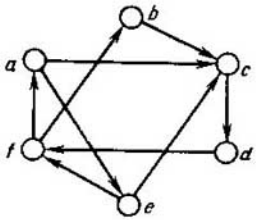


Fig. 3.17

y eliminando al menos un vértice de V^+ la relación (3.15) no se cumple. Este número determina el número minimal de vértices, desde los cuales se puede «observar» (son alcanzables a un paso) todos los vértices del grafo.

Se denomina *número vértice negativo de la estabilidad exterior* $\beta_0^-(G)$ de un grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ la potencia minimal de un conjunto de vértices $V^- = \{v_i^-\}$ tal que

$$\{v_i^-\} \cup \{\Gamma^{-1} v_i^-\} = V, \tag{3.16}$$

y eliminando al menos un vértice del conjunto V^-, la relación (3.16) no se cumple. Este número es igual al número minimal de vértices que «se observan» desde todos los vértices del grafo.

Es obvio que el número $\beta_0^+(G)$ se calcula como potencia minimal del cubrimiento de columnas por filas en la matriz de adyacencia $\tilde{S}(G)$ del grafo G.

Ejemplo 3.11. Calculemos los números $\beta_0^+(G)$ y $\beta_0^-(G)$ del grafo G (fig. 3.17), cuya matriz de adyacencia tiene forma

$$\tilde{S}(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}$$

Según la definición del conjunto exteriormente estable, en el cual los vértices pertenecientes a este conjunto «se observan» por ellos mismos, los elementos diagonales s_{ii} de la matriz de adyacencia $S(G)$ tienen el valor 1 aunque en el grafo G no hay lazos. Cubriendo columnas por filas de la matriz modificada de adyacencia por medio del algoritmo de Petrick

$$(a + f)(b + d)(a + b + c)(c + d)(c + e)(b + d + e + f) =$$
$$= (a + f)(c + ed)(b + ad + dc) = (a + f)(cb + dc + ebd + aed) =$$
$$= abc + adc + ade + bcf + cdf + bedf,$$

obtenemos $\beta_0^+(G) = 3$.

Cubriendo filas por columnas de la matriz $\tilde{S}(G)$

$$(a + c)(b + c + f)(c + d + e)(b + d + f)(e + f)(a + f) =$$

$= (c + ab + af)(e + cf + df)(f + ab + ad) = (cf + af + ab + acd)(e + cf + df) =$
$= cf + aef + abe + acde + adf,$

obtenemos $\beta_{\bar{0}}(G) = 2$. En estas expresiones, todo término multiplicativo determina correspondiente conjunto exteriormente estable.

El número arista de la independencia $\varepsilon_1(G)$, el número del cubrimiento arista $\pi_1(G)$ y el número arista de la estabilidad exterior $\beta_1(G)$ de un grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ se determina de manera análoga, sólo en vez de la matriz modificada de adyacencia de los vértices en calidad de información de partida, se toma la matriz modificada de adyacencia de aristas $\bar{S}_a(G)$ del grafo G:

$$\bar{S}_a(G) = S_a(G) \vee \{1, 1, \ldots, 1\},$$

donde $S_a(G)$ es la matriz de adyacencia de aristas, $\{1, 1, \ldots, 1\}$ es la matriz diagonal unitaria.

Ejemplo 3.12. Hallemos $\varepsilon_1(G)$, $\pi_1(G)$ y $\beta_1(G)$ del grafo $G = \langle V, \Gamma \rangle$ representado en la mitad superior de la fig. 3.18.

Para determinar el número arista de la independencia $\varepsilon_1(G)$ del grafo G utilizamos el algoritmo para engendrar subgrafos vacíos. Ponemos el grafo prefijado en correspondencia a la raíz del árbol y determinamos la arista adyacente al número mínimal de aristas. Esta es la arista k, adyacente a tres aristas: f, p, m. Pongamos los extremos de arcos que parten de la raíz del árbol en correspondencia a las aristas k, f, p y m y ponderamos cada vértice del nivel construido por un subgrafo parcial, toda arista del cual y la arista correspondiente a este vértice (fig. 3.18) no son adyacentes. En otras palabras, al fijar una arista del grafo dado, ponemos en correspondencia a ella y a su entorno los vértices de un nivel del árbol, cada uno de los cuales se pondera por el no entorno de la arista correspondiente. Repetimos esta descomposición del grafo hasta obtener no entornos iguales a $\varnothing$ y engendramos así todos los conjuntos independientes en cuanto a aristas (fig. 3.19)

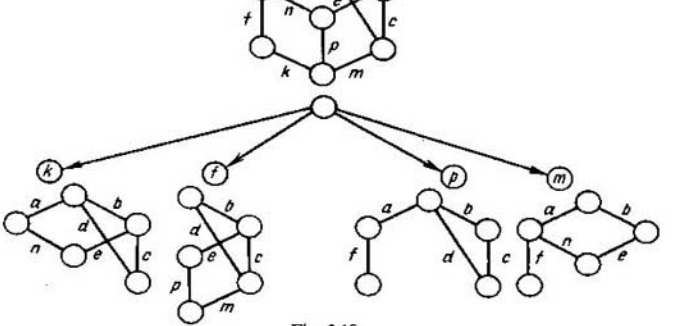


Fig. 3.18

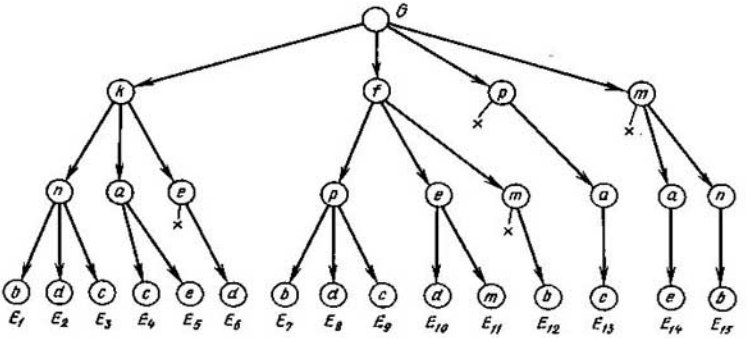


Fig. 3.19

$E_1 = \{b, k, n\}$, $E_2 = \{d, k, n\}$, $E_3 = \{c, k, n\}$, $E_4 = \{a, c, k\}$,
$E_5 = \{a, e, k\}$, $E_6 = \{d, e, k\}$, $E_7 = \{b, f, p\}$, $E_8 = \{d, f, p\}$,
$E_9 = \{c, f, p\}$, $E_{10} = \{d, e, f\}$, $E_{11} = \{e, f, m\}$,
$E_{12} = \{b, f, m\}$, $E_{13} = \{a, c, p\}$, $E_{14} = \{a, e, m\}$,
$E_{15} = \{b, m, n\}$.

Por consiguiente, el número arista de la independencia $\varepsilon_1(G)$ es igual a 3 y, debido a (3.14), el número del cubrimiento arista $\pi_1(G) = 7 - 3 = 4$ ($|\{b, m, n, k\}| = 4$). Cubriendo filas por columnas de la matriz modificada de adyacencia de aristas del grafo prefijado G

$$S_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & k & f & m & n & p \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ k \\ f \\ m \\ n \\ p \end{array} \end{array}$$

obtenemos que el número arista de la estabilidad exterior $\beta_1(G)$ del grafo G es igual a 3 ($|\{b, m, n\}| = 3$).

§ 3.6. Encaje de los grafos

Examinemos propiedades topológicas de los grafos. La topología examina las propiedades de los grafos que son invariantes respecto a las transformaciones homeomorfas. Estas propiedades se determinan por invariantes topológicas.

Dos grafos son homeomorfos, si son isomorfos con exactitud de hasta vértices de la potencia dos. En otras palabras, dos grafos son homeomorfos, si se transforman hasta los grafos isomorfos uno a otro, cambiando unas aristas por cadenas de longitud correspondiente.

El *género de una superficie* es el número máximo de curvas cerradas simples sobre una superficie. Estas curvas no dividen la mencionada superficie. La esfera y el plano son las superficies de género nulo, ya que se dividen por cualquier curva cerrada. El toro es una superficie de primer género. Toda superficie de p-ésimo género es equivalente a una esfera con p mangos.

El *género de un grafo* $\gamma(G)$ es un género minimal entre todas las superficies, sobre las cuales se puede representar el grafo G de tal modo que sus aristas se intersequen solamente en vértices. Un grafo es *planar*, si se representa en el plano de tal modo que sus aristas se intersequen solamente en vértices. El problema de caracterización de grafos planares quedaba irresoluble mucho tiempo. En 1927 L.S. Pontriaguin demostró (pero no publicó) el criterio del carácter planar que, independientemente de él, fue descubierto y publicado por el matemático polaco Kuratowski en 1930.

Teorema 3.17 (teorema de L.S.Pontriaguin). *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene un subgrafo homeomorfo a* F_5 *o* $K_{3,3}$ (fig. 3.20, *a*, *b*).

A base del criterio de Pontriaguin se puede obtener otro criterio del carácter planar, si se introduce el concepto de *junta elemental* que consiste en lo siguiente. Cuando se junta cualquier arista del grafo, ésta se elimina y los dos vértices a y b (fig. 3.21) coincidentes a ésta se identifican; el vértice obtenido es coincidente a las mismas aristas que a y b (excepto la arista eliminada).

Teorema 3.18. *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene los subgrafos que se juntan en* F_5 *o* $K_{3,3}$.

En 1932 el norteamericano Whitney introdujo otro criterio del carácter planar, empleando el concepto del grafo dual. El grafo G^* es *abstractamente dual* a G, si entre las aristas de los grafos G y G^* existe una correspondencia biunívoca; a un subconjunto de aristas de G que forman un ciclo en G le corresponde un subconjunto de aristas de G^* que forman un corte en G^*.

Si G contiene un vértice pendiente v, $s(v) = 1$, en G^* se obtiene un lazo. En la fig. 3.22 se representan los grafos G y G^* con tal que el grafo G está punteado.

Teorema 3.19 (teorema de Whitney). *Un grafo es planar si, y sólo si, existe un grafo abstractamente dual a él.*

Analicemos un problema que surge cuando se proyecta un circuito impreso. En la fabricación de aparatos electrónicos, los conductores de conexión se ponen sobre la superficie plana de material aislante por un proce-

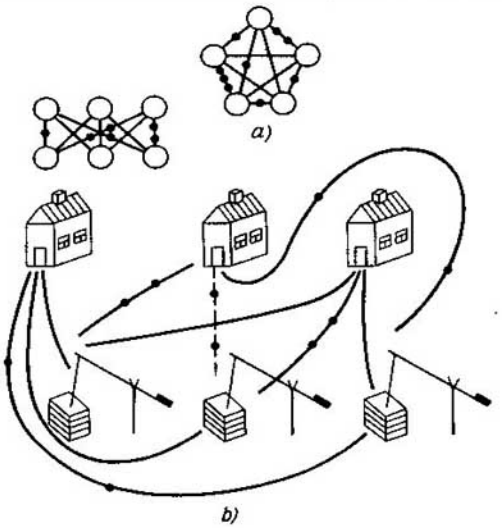


Fig. 3.20

dimiento impreso. Los conductores impresos no son aislados, por eso no deben intersecarse. Sin embargo, puede ser que en la disposición de aparatos en una placa es imposible evitar la intersección; por esta razón para proyectar correctamente un circuito impreso, hay que saber, si es planar el grafo, en el cual los dispositivos interpretan el papel de vértices y las conexiones entre los dispositivos sirven de aristas. Si el grafo no es planar, se tiene que imprimir en varios planos y es necesario conocer o bien el número de cruzamientos del grafo (el número mínimo posible de intersecciones en la representación del grafo en el plano), o bien su espesor. Se denomina *espesor* del grafo G el número mínimo de grafos planares, cuya unión da G. El espesor del grafo planar es igual a 1. La estimación inferior del espesor $t(G)$ del grafo $G = \langle V, U \rangle$ se determina por la igualdad

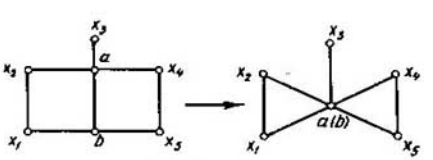


Fig. 3.21

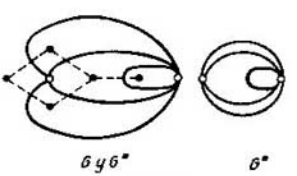


Fig. 3.22

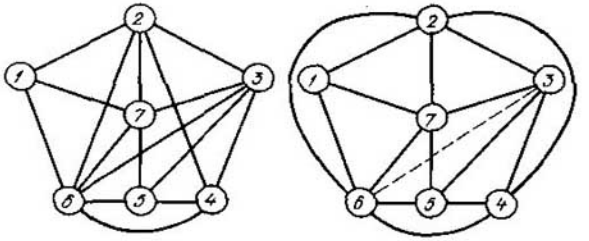


Fig. 3.23

$$t(G) \geqslant 1 + \left] \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i - 2}{6(n-2)} \right[, \tag{3.17}$$

donde][es la parte entera, $|V| = n$, s_i es la potencia del i-ésimo vértice.

Examinemos el grafo representado en la fig. 3.23, *a*. Determinemos, si se puede realizar la impresión en una capa; en caso contrario aclaremos cuántas capas necesitamos y qué aristas debemos eliminar para que el grafo se haga plano.

Debido al criterio de Pontriagiun este grafo no es planar, puesto que contiene subgrafos homeomorfos a F_5 (fig. 3.24, *a*) y $K_{3,3}$ (fig. 3.24, *b*). El espesor del grafo G no es menos de dos:

$$t(G) \geqslant 1 + \left] \frac{32-2}{6(7-2)} \right[= 2, \; t(G) \geqslant 2.$$

Para determinar qué aristas necesitamos eliminar para transformar el grafo en grafo planar, escogemos todas las figuras prohibidas y formemos una tabla bidimensional, cada fila de la cual corresponde biunívocamente

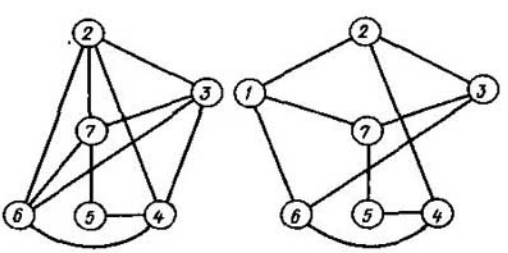


Fig. 3.24

a una figura prohibida Q_i y cada columna, a una arista ϱ_j. Entonces el cubrimiento de filas por columnas de esta tabla determinará qué aristas necesitamos eliminar para hacer el grafo planar. El cubrimiento minimal corresponderá a una resolución minimal, puesto que eliminando cualquier arista sacamos la figura prohibida de la clase de subgrafos homeomorfos a F_5 y $K_{3,3}$.

Para el grafo considerado, esta tabla tiene forma (tabla 3.1):

Tabla 3.1

Q_i	ϱ_j													
	{1,2}	{2,6}	{2,3}	{1,6}	{6,7}	{1,7}	{2,4}	{2,7}	{3,6}	{3,7}	{3,4}	{4,6}	{4,5}	{5,7}
Q_1		1	1		1		1	1	1	1	1	1	1	1
Q_2	1		1	1		1	1		1	1		1	1	1

El cubrimiento minimal contiene una de las aristas {2, 3}, {2, 4}, {3, 6}, {3, 7}, {4, 6}, {4, 5} ó {5, 7}. Por ejemplo, después de eliminar la arista {3, 6} obtenemos el grafo planar, cuya representación plana se ve en la fig. 3.23, *b*. La conexión correspondiente a la arista eliminada (línea punteada) se realiza en el segundo plano. El espesor $t(G)$ del grafo G equivale a 2.

Tiene gran interés práctico el problema de encaje de grafos en otros grafos que tienen propiedades estructurales especiales. Una clase importante de estos grafos es la clase de cubos n-dimensionales. Estos últimos se aplican en la teoría de codificación para trasmitir los datos y para proyectar autómatas. Designemos un cubo n-dimensional por medio de H_n. La potencia de su portador es igual a 2^n, la potencia de su signatura equivale a $n \cdot 2^{n-1}$.

Introduzcamos una métrica sobre un grafo H_n del modo siguiente. Sea que una función no negativa de dos variables $d(a, b)$ determina la distancia entre dos vértices a, $b \in H_n$, igual al número de aristas en la cadena simple más corta que une a y b. Con esto se cumplen las siguientes condiciones:

1. $d(a, a') = 0$ si, y sólo si, los vértices a y a' coinciden.
2. $d(a, b) = d(b, a)$.
3. Para cualesquiera tres $a, b, c \in H_n$ $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$.

Por consiguiente, el conjunto de vértices de un n-cubo junto a la métrica introducida de este modo es un espacio métrico que se denominará *espacio booleano*. Si una métrica introducida en un conjunto dado, ella está introducida también en cualquier de sus subconjuntos como una restricción de la función d. Por esta razón cualesquier subgrafo de n-cubo también es el espacio métrico.

Analicemos el problema del encaje del grafo G en un espacio booleano H_n. Un grafo $G = \langle V, U \rangle$ se denomina *encajable en el espacio booleano*

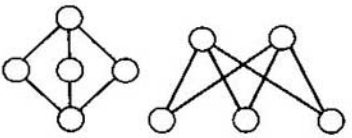


Fig. 3.25

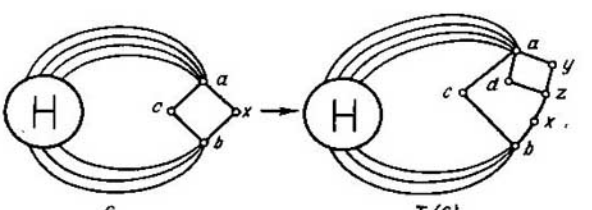
$H_n = \langle V_H, U_N \rangle$ o *cubicable,* si existe una correspondencia φ entre los vértices del grafo G y los del hipercubo H_n, tal que si $(v_\alpha, v_\beta) \in U$, entonces $(\varphi(v_\alpha), \varphi(v_\beta)) \in U_H$. No se debe confundir el grafo cubicable con el cúbico, es decir el grafo, cada vértice del cual tiene la potencia igual a 3.

Ya que el n-cubo es el grafo de dos partes, en virtud del teorema de König, todos sus ciclos simples son pares y por eso cualquier grafo con un subgrafo que es ciclo impar no se cubica. Puesto que el n-cubo es isomorfo a un retículo distributivo el grafo de König $K_{2,3}$ (fig. 3.25) es, también el grafo no cubicable. Pero cualesquier grafo parcial del ciclo impar y el grafo $K_{2,3}$ son encajables en un espacio booleano. Por consiguiente, los ciclos de la longitud impar y el grafo de König $K_{2,3}$ son las figuras prohibidas del encaje del grafo en un espacio booleano. En este caso, una figura prohibida significa un grafo críticamente no encajable, es decir, un grafo no cubicable que tiene todos los grafos parciales cubicables. Examinemos procedimientos para engendrar figuras prohibidas en la base de las conocidas.

Teorema 3.20 (teorema de Graham). *En la cara de una figura prohibida el cambio de una arista* ϱ *por un grafo de König* $K_{2,3}$, *sin esta arista* ϱ, *o sea,* $K_{2,3} \setminus \varrho$, *engendra nueva figura prohibida* $T_1(Q)$ (fig. 3.26).

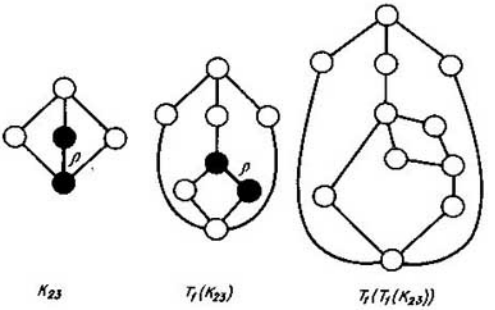
En la fig. 3.27 se muestra la generación de figuras prohibidas del encaje de grafos en un espacio booleano empleando el procedimiento de Graham (teorema 3.20).

La caracterización de los grafos cubicables es bastante complicada debido a las dificultades que surgen en el análisis de estas estructuras combinatorias. Para determinar las razones que impiden a un grafo de ser cubicable,



6 $T_1(6)$

Fig. 3.26.



K_{23} $T_1(K_{23})$ $T_1(T_1(K_{23}))$ Fig. 3.27

hay que encontrar sus propiedades estructurales enunciando, por ejemplo, las condiciones que describen la interrelación entre sus parámetros que portan la información de estas razones.

Analicemos unas propiedades de un n-cubo que influyen en la estructura de figuras prohibidas. La longitud maximal de la cadena que une dos vértices v_α, v_β del n-cubo es igual a $2^n - 1$. Esta cadena la representa el esqueleto del grafo H_n. La distancia $d(x, y)$ entre dos vértices x, $y \in H_n$ es igual a i, $i = 1, 2, \ldots, n$. El diámetro del n-cubo es igual a n. Dos vértices x e y del n-cubo alejados uno del otro a la distancia equivalente al diámetro se unen entre sí ¡con $n!$ cadenas.

Teorema 3.21. *Si fijamos cualquier vértice de un n-cubo $x \in H_n$, el conjunto de todos los otros vértices se parte en n subconjuntos $V_i \in H_n$ tales que todo vértice del i-ésimo subconjunto, $v_i \in V_i$, tiene una distancia hasta el vértice fijado igual a $d(x, v_i) = i$ y, en el i-ésimo subconjunto, el número de tales vértices es igual a $\binom{n}{i}$ para todos los i.*

□Pongamos un vector binario de la longitud n en correspondencia a cada vértice del n-cubo. Puesto que el n-cubo es un grafo regular, todo vértice del cual tiene la potencia igual a n, tomemos, sin perder la generalidad, el vértice 0, 0, . . ., 0 en calidad del vértice fijado. Partiendo el conjunto de vértices del n-cubo en subconjuntos de vértices, a los cuales corresponden vectores de número igual de unidades, señalemos que entre todo vértice del i-ésimo subconjunto, al cual corresponde un vector con i unidades, y el vértice considerado media una distancia igual a i. El número de tales vértices equivale a $\binom{n}{i}$. ■

Teorema 3.22. *En un n-cubo, el número de cadenas simples de longitud k, $k \leqslant n$, entre vértices v_α, v_β, la distancia entre los cuales $d(v_\alpha, v_\beta) = k$, y que no tienen otros vértices comunes, excepto los v_α y v_β, es igual a k.*

□¡Todas las $k!$ de las cadenas de longitud k entre los vértices v_α y v_β, $d(v_\alpha, v_\beta) = k$, forman un k-cubo. En este cubo, la potencia minimal del

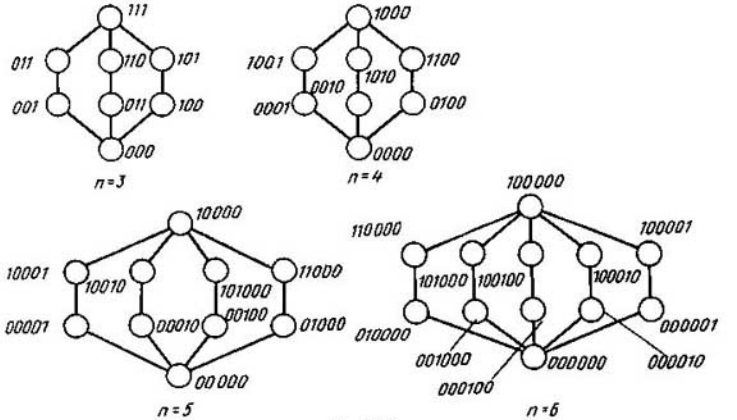


Fig. 3.28

conjunto de vértices separadores es igual a k (vértices adyacentes a v_α o v_β). De aquí, en virtud del teorema 3.9, el número de cadenas simples no intersecantes por vértices entre los vértices v_α y v_β es igual a k. ■

El resultado obtenido es importante cuando se estudian grafos prohibidos. Notemos que el número de las cadenas simples más cortas (geodésicas) entre dos vértices α y β de un hipercubo es igual a la distancia entre estos dos vértices. El número de cadenas simples no intersecantes entre los vértices de un n-cubo para las cuales según Hamming, la distancia entre ellas es menos que sus longitudes, depende de la dimensión del n-cubo. En la fig. 3.28(a) se dan las tres cadenas más cortas que unen los vértices 000 y 111 en un cubo tridimensional. En la fig. 3.28(b, c, d) se ilustra el crecimiento del número de cadenas de la longitud 3 en los cubos de la dimensión 4, 5, 6, respectivamente.

Teorema 3.23. *El grafo $G = \langle V, U\rangle$ que incluye en sí k cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud k entre los vértices $\alpha, \beta \in V$, $d_G(\alpha, \beta) = k$, es encajable en un n-cubo H_n con la particularidad de que la distancia, según Hamming, entre los vértices α y β queda constante, es decir, $d_H(\alpha, \beta) = d_G(\alpha, \beta) = k$, si, y sólo si, cualesquiera dos vértices adyacentes del grafo G $a, b \in V$ forman parte de un ciclo de la longitud 4 $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$* (fig. 3.29), *tal que si $d_H(\alpha, a) = \max\limits_i d_H(\alpha, i) = t$; $i = a, b, c, d$, entonces*

$$d_H(\alpha, b) = d_H(\alpha, d) = t - 1, \quad d_H(\alpha, c) = t - 2.$$

Teorema 3.24. *En un grafo crítico $Q = \langle V, U\rangle$ existen dos vértices α,*

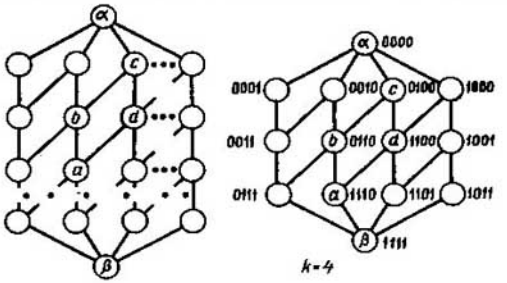


Fig. 3.29

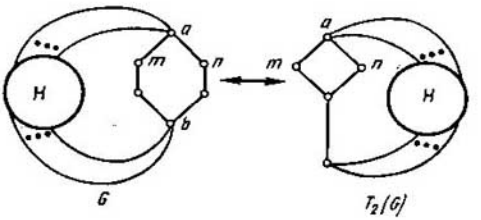


Fig. 3.30

β, la distancia entre los cuales es igual al diámetro $d(\alpha, \beta) = d(Q)$ *y el número k de caminos simples es la unidad mayor que* $k = d(Q) + 1$.

Enunciaremos varios teoremas que permiten generar los grafos prohibidos del encaje en un *n*-cubo.

Teorema 3.25. *Si G es un grafo crítico, el grafo* $T_2(G)$ *es también crítico si, y sólo si, la potencia de un vértice a es mayor que la potencia de un vértice b, es decir,* $s(a) > s(b)$ (fig. 3.30) *y la transformación no lleva a formar un subgrafo crítico (es decir, G no contiene* 4 *cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud* 3 *entre los vértices a, b y un subgrafo H del grafo* $T_2(G)$ *no se compone de dos cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud* 3).

Teorema 3.26. *La sustitución de cualquier arista* $(a, b) \in G$ *de un grafo crítico G por k cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud* 3 *lleva a formar el grafo crítico* $T_3(G)$ *si, y sólo si, k satisface una de las condiciones siguientes:*

1) $k = 1$, *si la arista eliminada es la arista común de dos ciclos de longitud* 4;

2) $k = 2$, si $s(a) = 3$, $s(b) = 2$ y *los vértices a, b pertenecen a un ciclo de longitud* 4;

3) $k = m + 2 - s(a)$ *si* $s(a) > s(b)$ *y* $m = d(G')$ *donde* $d(G')$ *es el diámetro del grafo G' obtenido del grafo G cambiando la arista eliminada por una cadena de longitud* 3;

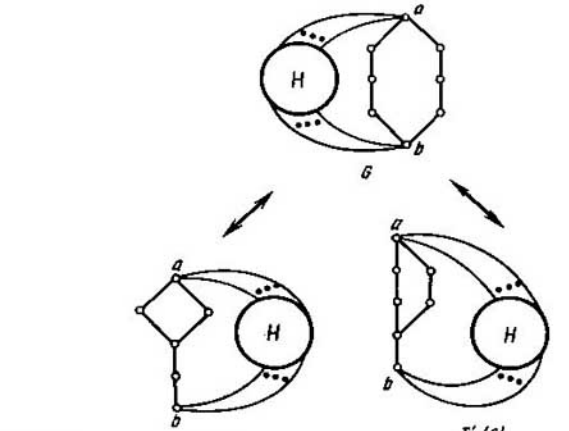


Fig. 3.31

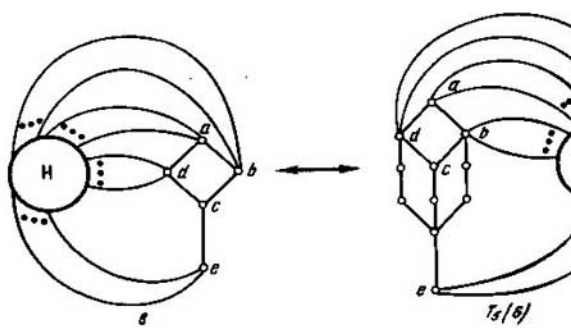


Fig. 3.32

4) $k = 4$, *si la arista eliminada es incidente a los vértices de la potencia* 2: $s(a) = s(b) = 2$.

Teorema 3.27. *El grafo* $T_4(G)$ ($T_4'(G)$) (fig. 3.31) *es crítico si, y sólo si, el grafo G es también crítico.*

Teorema 3.28. *El grafo* $T_5(G)$ *es crítico si, y sólo si, el grafo G es crítico* (fig. 3.32).

Teorema 3.29. *Si G es el grafo crítico,* $T_6(G)$ *es también crítico si, y sólo si, un subgrafo H contiene punto de acoplamiento y el número de cadenas añadidas se determina partiendo de la condición*

$$k = d(G') + 1 - s(a),$$

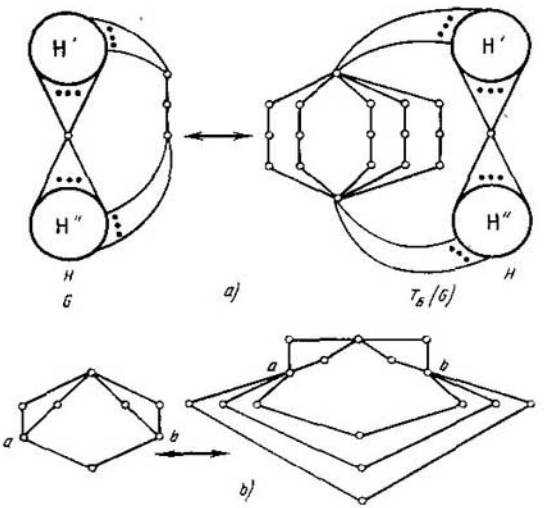


Fig. 3.33

donde a, b∈H para $s(a) \leqslant s(b)$ y el grafo G' se obtiene del grafo G al cambiar una cadena de longitud 2 entre los vértices a, b por una cadena de longitud 4 (fig. 3.33, *a*).

En la fig. 3.33, *b* se pone un ejemplo de tal transformación prefijado por el teorema dado para un subgrafo H donde $s(a) = s(b) = 2$, el diámetro $d(G') = 4$ y $k = 4 + 1 - 2 = 3$.

Un conjunto de grafos prohibidos del encaje en un n-cubo es numerable. En la fig. 3.34 se ofrece el catálogo de los grafos críticos con la potencia del portador variada de 8 a 17 que frecuentemente se encuentran en la práctica.

Entre ellos existen tanto los grafos obtenidos por medio de las transformaciones dadas T_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, como los grafos sin precedentes.

Cuando se generan las figuras prohibidas es indispensable verificar el isomorfismo de los grafos obtenidos. Examinemos un algoritmo para establecer el isomorfismo entre dos grafos G_a, G_b basado en la descomposición en frecuencia de modelos $\Psi_a(G_a)$ y $\Psi_b(G_b)$ construidos según estos grafos.

1. Empleando el algoritmo dado anteriormente escogemos los subgrafos completos en los grafos G_a y G_b. Los subgrafos escogidos forman palabras en los modelos correspondientes $\Psi_a(G_a)$ y $\Psi_b(G_b)$.

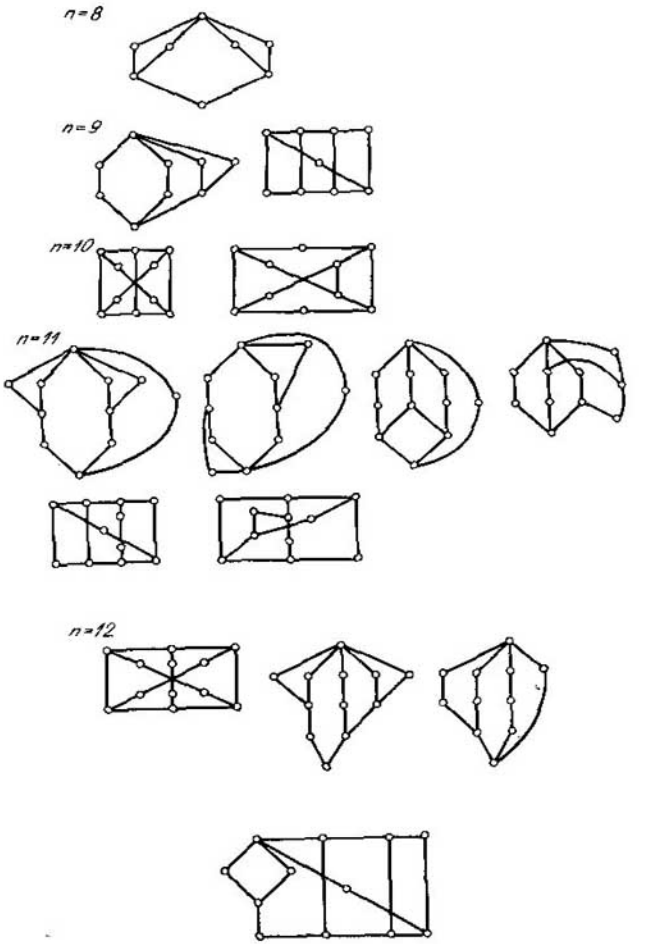


Fig. 3.34

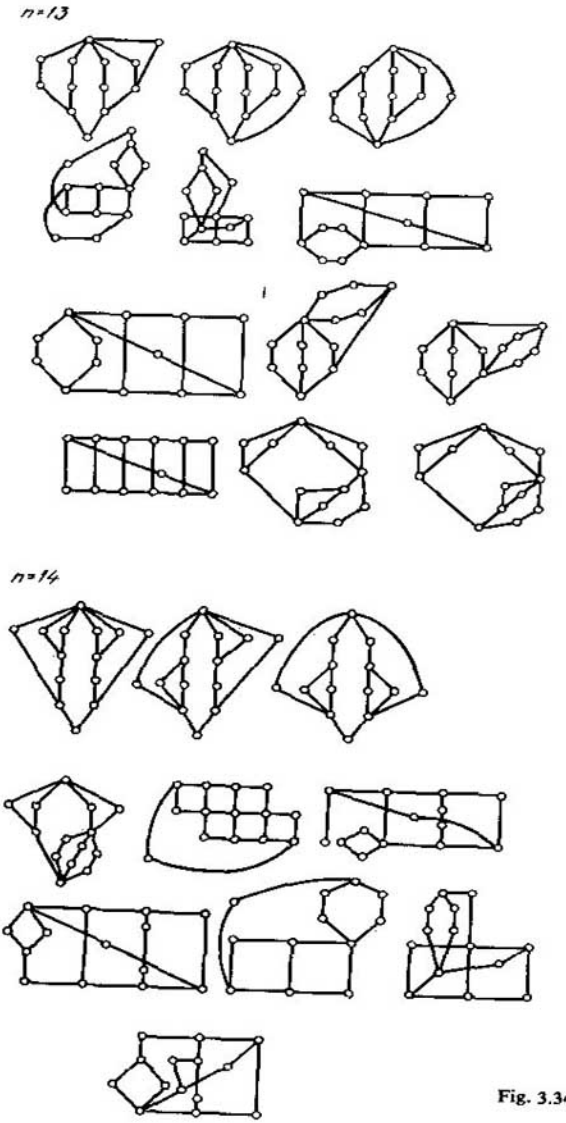


Fig. 3.34. Continuación

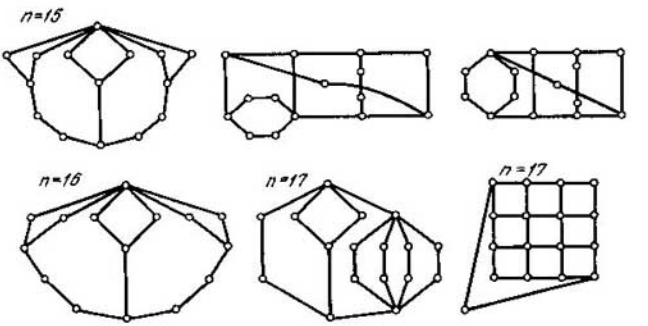


Fig. 3.34. Terminación

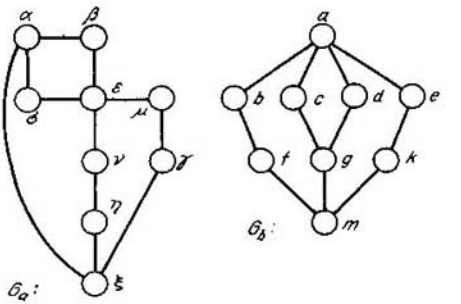


Fig. 3.35

2. Hallamos descomposiciones en frecuencia de los modelos $\Psi_a(G_a)$ y $\Psi_b(G_b)$. Determinemos la igualdad de los coeficientes en las descomposiciones. Si las descomposiciones en frecuencia son iguales, los grafos G_a y G_b son isomorfos.

De la igualdad de las composiciones determinamos trivialmente el isomorfismo. Si las descomposiciones en frecuencia no son iguales, los grafos G_a y G_b no son isomorfos.

Ilustremos el algoritmo con el ejemplo del establecimiento del isomorfismo entre los grafos G_a y G_b (fig. 3.35).

El primer punto del algoritmo se cumple trivialmente, ya que los grafos son de dos partes (subgrafos completos son las aristas). De aquí se deduce que los modelos Ψ_a y Ψ_b coinciden respectivamente con los grafos G_a y G_b:

$$\psi_a = \langle V_a, S_2 \rangle,\ V_a = \{\alpha, \beta, \ldots, \xi\},$$
$$S_2 = \{\{\alpha, \beta\}, \{a, \delta\}, \{a, \xi\}, \{\beta, \varepsilon\}, \{\gamma, \mu\}, \{\gamma, \xi\},$$
$$\{\mu, \varepsilon\}, \{\varepsilon, \delta\}, \{\varepsilon, \nu\}, \{\nu, \eta\}, \{\eta, \xi\}\};$$

$\psi_b = (V_b, S_b')$, $V_b = \{a, b, \ldots, m\}$,
$S_b' = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, g\}, \{e, k\}, \{f, m\}, \{g, m\}, \{k, m\}\}$.

Las descomposiciones en frecuencia de los modelos ψ_a y ψ_b tienen siguiente forma:

$F(\psi_a) = 3\alpha^2 \circ 2\beta^2 \circ 2\gamma^2 \circ 2\mu^2 \circ 4\varepsilon^2 \circ 2\delta^2 \circ 2\nu^2 \circ 2\eta^2 \circ 3\xi^2 \circ \alpha\beta \circ \alpha\delta \circ \alpha\xi \circ \beta\varepsilon \circ \gamma\mu \circ \gamma\xi \circ \mu\varepsilon \circ \varepsilon\delta \circ \varepsilon\nu \circ \nu\eta \circ \eta\xi$,

$F(\psi_b) = 4a^2 \circ 2b^2 \circ 2c^2 \circ 2d^2 \circ 2e^2 \circ 2f^2 \circ 3g^2 \circ 2k^2 \circ 3m^2 \circ ab \circ ac \circ ad \circ ae \circ bf \circ cg \circ dg \circ ek \circ fm \circ gm \circ km$.

Las descomposiciones en frecuencia son iguales a: $F(\psi_a) = F(\psi_b)$. Los grafos G_a y G_b son isomorfos. Para determinar el isomorfismo establecemos la correspondencia biunívoca entre las letras con espectros iguales de frecuencias:

$\varepsilon \leftrightarrow a$, $\mu \leftrightarrow b(e)$, $\beta \leftrightarrow c(d)$, $\nu \leftrightarrow e(b)$, $\delta \leftrightarrow d(c)$, $\gamma \leftrightarrow f(k)$, $\alpha \leftrightarrow g$, $\eta \leftrightarrow k(b)$, $\xi \leftrightarrow m$.

Para determinar el isomorfismo de los grafos orientados, al algoritmo expuesto se le adiciona el tercer punto. Si los grafos G_a y G_b son isomorfos sin tener en cuenta la orientación, examinando los pares correspondientes de vértices determinamos la conservación del isomorfismo contando con la orientación.

Otro algoritmo para determinar el isomorfismo de los grafos consiste en una partición consecuente de las clases de vértices del grafo, cada una de las cuales comprende los vértices de igual potencia; la partición se base en el cálculo del número de aristas que unen el vértice considerado con vértices de estas clases.

Analicemos dos grafos: G_a y G_b (fig. 3.36, *a*, *b*). El portador del grafo G_a se parte, según los valores de las potencias de vértices, en cuatro clases: $K_1 = \{1, 2, 6\}$, $K_2 = \{4\}$, $K_3 = \{3\}$, $K_4 = \{5\}$. El portador del grafo G_b también se parte en cuatro clases: $K_1' = \{b, c, f\}$, $K_2' = \{e\}$, $K_3' = \{a\}$, $K_4' = \{d\}$. El número de clases y sus potencias coinciden; por consiguiente, los grafos G_a y G_b pueden ser isomorfos y, además, el isomorfismo η aplica, obviamente, los vértices 3, 4, 5 en *a*, *e*, *d*, respectivamente: $a = \eta(3)$, $e = \eta(4)$, $d = \eta(5)$.

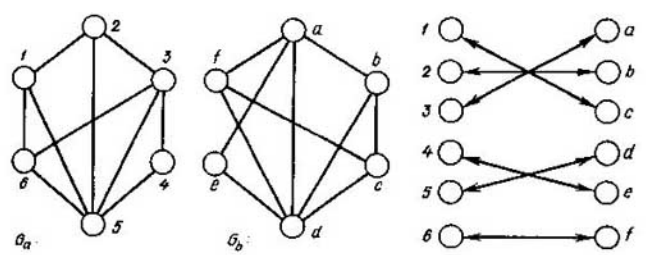


Fig. 3.36

Determinemos el número de conexiones de los vértices 1, 2, 6 en el grafo G_a y los vértices b, c, f en el grafo G_b con vértices de las clases escogidas. Para realizarlo formemos una tabla bidimensional (tabla 3.2), a cada fila de la cual se le corresponde biunívocamente una clase escogida; a cada columna, un vértice y en la intersección (i, j) se indica el número de conexiones del j-ésimo vértice con los vértices de la i-ésima clase.

Tabla 3.2

K_i	v_j			v_j'			K_i'
	1	2	6	b	c	f	
K_1	2	1	1	1	2	1	K_1'
K_2	0	0	0	0	0	0	K_2'
K_3	0	1	1	1	0	1	K_3'
K_4	1	1	1	1	1	1	K_4'

Analizando la tabla notemos que la clase K_1 se parte en dos clases: $\bar{K}_1 = \{2, 6\}$ y $K_5 = \{1\}$; la clase K_1' también se parte en dos clases: $K_1' = \{b, f\}$ y $K_5' = \{c\}$. Si estos grafos son isomorfos, $c = \eta(1)$. Para establecer los vértices correspondientes de los grafos G_a, G_b, formemos la tabla (tabla 3.3) de la partición obtenida de los vértices.

Tabla 3.3

K_i	v_j		v_j'		K_j'
	2	6	b	f	
K_1	0	0	0	0	K_1'
K_2	0	0	0	0	K_2'
K_3	1	1	1	1	K_3'
K_4	1	1	1	1	K_4'
K_5	1	1	1	1	K_5'

Las columnas iguales señalan que el vértice 2(6) puede ponerse en correspondencia tanto al vértice b como al f. Como resultado obtenemos dos correspondencias η y η', ya que los entornos de los vértices 2 y 6 coinciden. Escogiendo una de ellas y comprobándola de isomorfismo, deducimos que los grafos considerados son isomorfos (fig. 3.36, *c*).

§ 3.7. Coloración de los vértices y de las aristas del grafo. Caracterización de la propiedad de arista

Se denomina *coloración de los vértices* de un grafo $G = \langle V, U \rangle$ en k colores una partición del portador V del grafo G, realizando la cual todo subconjunto $V_i \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V,\ V_i \cap V_{i_b} = \varnothing,\ i_a,\ i_b = 1, 2, \ldots, k \right)$ no contiene nin-

gún par de vértices adyacentes. A todo subconjunto se le pone en correspondencia un color con que se pintan todos los elementos de este subconjunto. Los vértices pintados de un mismo color se denominarán *concoloreados.*

Se llama *número cromático* $h(G)$ del grafo G un número minimal n, para el cual el grafo tiene n-coloración. Un grafo con el número cromático n se denomina n-cromático; pero, si $h(G) \leqslant n$, el grafo G se denomina n-colorable.

Es obvio, que un grafo puede ser 1-cromático si, y sólo si, éste es un grafo vacío.

Para los grafos 2-cromáticos es válido el siguiente teorema.

Teorema 3.30 (teorema de König). *Un grafo es 2-cromático si, y sólo si, no contiene ciclos de longitud impar.*

Señalemos que un teorema análogo expresa también la condición de dos partes. Por esta razón todos los grafos 2-cromáticos (bicolor) son de dos partes. Cualquier árbol, siendo un grafo de dos partes, es bicolor. Apreciamos el número cromático de un grafo por medio de sus parámetros.

Teorema 3.31. *Si la potencia maximal de los vértices de un grafo G es igual a $s(G)$, el número cromático de este grafo no supera la magnitud $s(G) + 1$:*

$$h(G) \leqslant s(G) + 1. \tag{3.18}$$

Para la mayoría de los grafos se puede mejorar esta estimación.

Teorema 3.32 (teorema de Brooks). *Un grafo G de la potencia $s(G)$ es s-colorable, excepto dos casos:*

1) *para $s(G) > 2$, el grafo G contiene un componente que es el grafo completo de densidad igual a $s(G) + 1$;*

2) *para $s(G) = 2$, el grafo G contiene un componente que es ciclo de longitud impar.*

Sin embargo, las estimaciones obtenidas empleando estos teoremas dan una buena aproximación solamente si las potencias de todos los vértices del grafo tienen valores próximos. En caso contrario la estimación puede tomar valor considerablemente exagerado. Por ejemplo, debido al teorema de Brooks, el grafo estelar $K_{1,n}$ es n-colorable, mientras que, en efecto, es de dos partes y por eso basta emplear dos colores para su coloración.

Teorema 3.33 (teorema de Berge, Ore, Harary). *Para cualquier grafo $G = \langle V, U \rangle$*

$$\left\lfloor \frac{|V|}{\beta_0} \right\rfloor \leqslant h(G) \leqslant |V| - \beta_0 + 1, \tag{3.19}$$

donde β_0 es el número vértice de independencia del grafo.

Teorema 3.34 (teorema de Gaddum, Nordhaus). *La suma y el producto de los números cromáticos de un grafo $G = \langle V, U \rangle$, y su complemento*

$\overline{G} = \langle V, \overline{U} \rangle$ *satisfacen las desigualdades*

$$]2\sqrt{|V|}[\leqslant h(G) + h(\overline{G}) \leqslant |V| + 1,$$

$$|V| \leqslant h(G) \cdot h(\overline{G}) \leqslant \left]\frac{(|V| + 1)^2}{4}\right[, \tag{3.20}$$

donde][es la parte entera.

Teorema 3.35. *El número cromático* $h(G)$ *de un grafo* G *es:*

$h(G) \leqslant h(G_a) \cdot h(G_b)$, *donde* $G = G_a \cup G_b$; (3.21)

$h(G) = h(G_a) + h(G_b)$, *donde* $G = G_a + G_b$; $G_a \cap G_b = \varnothing$; (3.22)

$h(G) \leqslant \min(h(G_a), h(G_b))$, *donde* $G = G_a \times G_b$. (3.23)

Análogamente a la coloración de los vértices de un grafo se define la coloración de sus aristas.

Se denomina *coloración de las aristas* de un grafo $G = \langle V, U \rangle$ una partición de la signatura U del grafo: $U = \bigcup_i U_i$; $U_{i_\alpha} \cap U_{i_\beta} = \varnothing$, $\alpha \neq \beta$, realizando la cual todo subconjunto U_i no contiene ningún par de aristas adyacentes. A cada subconjunto se le pone en correspondencia un color; con esto las aristas pertenecientes a un mismo subconjunto se denominan *concoloreados.*

Un grafo G se denomina *k-colorable por aristas,* si se puede pintar sus aristas con k colores de tal modo que ningunas aristas adyacentes estén pintadas de un mismo color.

Llámase *clase cromática* (*índice cromático*) de un grafo un número k tal que el grafo es k-colorable por aristas, pero no se puede pintar sus aristas en $k - 1$ colores. La clase cromática del grafo G se designa mediante $H(G)$.

Por ejemplo, la clase cromática para los grafos de dos partes $H(K_{1,4}) = 4$, $H(K_{2,3}) = 3$.

La clase cromática $H(G)$ de un grafo G coincide con el número cromático del grafo $G' = \langle X', \Gamma' \rangle$ definido del modo siguiente: sus vértices X' corresponden biunívocamente a las aristas del grafo G y $x'_a \in \Gamma x'_b$, si las aristas correspondientes del grafo G son adyacentes. Por consiguiente, el problema de determinar la clase cromática se reduce al problema de determinar el número cromático.

Al respecto de reducir la coloración de aristas de un grafo a la coloración de sus vértices examinemos una propiedad importante de los grafos, es decir la propiedad arista.

Un grafo $G = \langle V, U \rangle$ posee la *propiedad arista* si, y sólo si, existe una correspondencia biunívoca, realizando la cual todo vértice $v_i \in V$ del grafo G corresponde a una arista $\tilde{u}_j \in \tilde{U}$ del grafo $\tilde{G} = \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle$ y, además, la matriz de adyacencia de los vértices del grafo G es semejante a la matriz de adyacencia de las aristas del grafo $\tilde{G}$. Dos matrices son *semejantes,* si coinciden

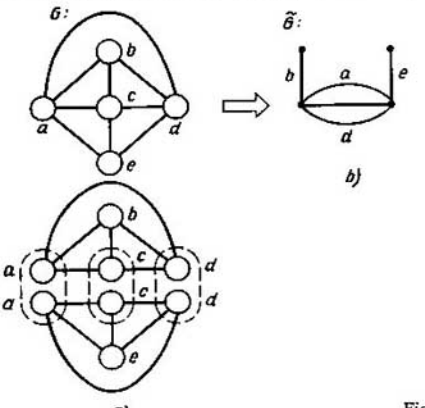


Fig. 3.37

con exactitud de hasta la permutación de filas (columnas). En el caso general, el grafo $\tilde{G}$ puede ser multigrafo, es decir, un grafo de aristas paralelas.

Teorema 3.36. *Un grafo G posee la propiedad arista si, y sólo si, se puede descomponerlo con respecto a la operación aditiva «unión»* $G = \bigcup_i F_i$ *en subgrafos completos* $\{F_i\}$, *en los cuales cada vértice no se incluye más de dos veces.*

Ejemplo 3.13 (fig. 3.37). Consideremos la propiedad arista del grafo

$G = \langle V, U\rangle$, $V = \{a, b, c, d, e\}$,

$U = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

Se puede descomponer el grafo G en dos subgrafos completos $G = F_\alpha \cup F_\beta$ (fig. 3.37, *a*):

$F_\alpha = \langle V_\alpha, U_\alpha\rangle$, $V_\alpha = \{a, b, c, d\}$,

$U_\alpha = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$,

$F_\beta = \langle V_\beta, U_\beta\rangle$, $V_\beta = \{a, c, d, e\}$,

$U_\beta = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$,

$V_\alpha \cap V_\beta = \{a, c, d\}$.

Las condiciones del teorema 3.36 están cumplidas, el grafo G posee la propiedad arista, su correspondiente grafo G derivado por aristas se representa en la fig. 3.37, *b*.

Si ponemos las restricciones sobre la descomposición del grafo inicial G (a saber: descomponiendo el grafo G en subgrafos completos no admitir la repetición de aristas en subgrafos completos), el grafo derivado por aristas G no contendrá aristas paralelas.

Teorema 3.37. *El grafo G posee la propiedad arista y su correspondiente grafo G derivado por aristas es grafo común si, y sólo si, existe una parti-*

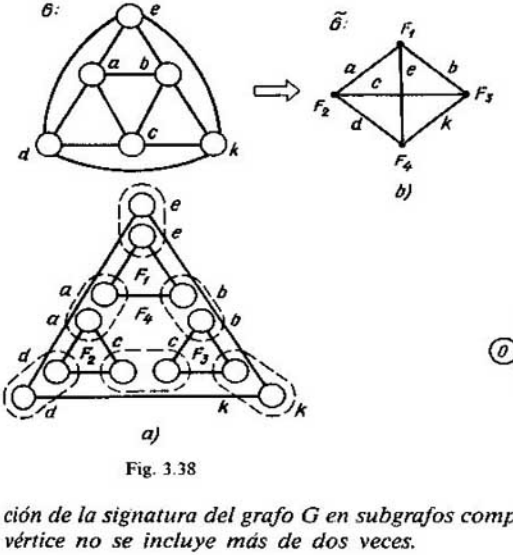


Fig. 3.38

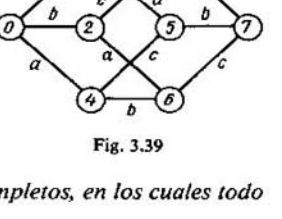


Fig. 3.39

ción de la signatura del grafo G en subgrafos completos, en los cuales todo vértice no se incluye más de dos veces.

Ejemplo 3.14. Determinemos, si el grafo $G = \langle V, U\rangle$ (fig. 3.38) tiene un grafo derivado por aristas. Se puede descomponer el grafo G en cuatro subgrafos completos:

$$G = \bigcup_{i=1}^{4} F_i,$$

$F_1 = \langle V_1, U_1\rangle$, $V_1 = \{a, b, e\}$,
$U_1 = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}\}$;
$F_2 = \langle V_2, U_2\rangle$, $V_2 = \{a, c, d\}$,
$U_2 = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$;
$F_3 = \langle V_3, U_3\rangle$, $V_3 = \{b, c, k\}$,
$U_3 = \{\{b, c\}, \{b, k\}, \{c, k\}\}$,
$F_4 = \langle V_4, U_4\rangle$, $V_4 = \{d, e, k\}$,
$U_4 = \{\{d, e\}, \{d, k\}, \{e, k\}\}$.

Cada vértice v_i, $v_i \in V$, se incorpora en subgrafos completos F_i, $i = 1, \ldots, 4$, dos veces (fig. 3.38, *a*). Las condiciones del teorema 3.37 están cumplidas, el grafo $\tilde{G}$ derivado por aristas se representa en la fig. 3.38, *b*.

Al realizar la construcción de un grafo $\tilde{G} = \langle \tilde{V}, \tilde{U}\rangle$ derivado por aristas, a cada vértice $v_i \in V$ de la potencia $s(v_i) > 1$ se le pone en correspondencia un grafo completo $F_i \subset G$ escogido en el grafo G. Las aristas incidentes al vértice $v_i \in \tilde{V}$ corresponden biunívocamente a los vértices del grafo G que forman este subgrafo completo F_i. El vértice $v_i \in \tilde{V}$ de la potencia

$s(v_i) = 1$ es coincidente a la arista ϱ_j, a la cual le corresponde el vértice $v_j \in V$ incorporado una vez en los subgrafos completos escogidos.

Empleando las propiedades de la coloración por aristas del hipercubo, propongamos un algoritmo óptimo para encajar un grafo G en un hipercubo. Es obvio, que la clase cromática $H(H_n)$ de un cubo n-dimensional H_n es igual a su dimensión n, $H(H_n) = n$. Al mismo tiempo, las aristas concoloreadas del hipercubo forman su corte. Por ejemplo, para $n = 3$ cada conjunto de aristas concoloreadas $a = \{\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}\}$; $b = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}\}$; $c = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$ forma el corte (fig. 3.39).

Teorema 3.38 (teorema de M.I.Smirnov). *Un grafo G es encajable en un hipercubo si, y sólo si, todo conjunto de aristas concoloreadas forma su corte.*

A base de este teorema, obtengamos el algoritmo para encajar el grafo G en un hipercubo compuesto de las siguientes transformaciones:

1. Construyendo el árbol correspondiente, escogemos subconjuntos independientes por aristas (subconjuntos vacíos por aristas). A las aristas de cada uno de estos subgrafos se les puede poner en correspondencia el mismo color.

2. De la lista obtenida en el punto 1 escogemos subconjuntos, cada uno de los cuales forma corte del grafo G.

3. Empleando subconjuntos escogidos en el punto 2 coloramos las aristas del grafo prefijado.

4. Verificamos, si todo conjunto de aristas concoloreadas forma corte del grafo. Si «no», mediante la reducción minimal de la signatura o la extención minimal del portador hacemos el grafo $\tilde{G}$ equivalente al grafo prefijado G ($\tilde{G}$ debe satisfacer las condiciones del teorema 3.38). Si «sí», pasamos al punto 5.

5. Realicemos el encaje de hecho del grafo obtenido en el punto 4 en el espacio booleano. Con ello, la coloración de la arista corresponde biunívocamente al orden del vector binario que identifica el vértice de un hipercubo. Al transpasar la arista $\{v_i, v_j\}$ pintada del i-ésimo color, los códigos binarios de los vértices v_i y v_j se diferencian en el i-ésimo orden.

6. El fin.

Ejemplo 3.15. Encajamos el grafo G (fig. 3.40, *a*) en un espacio booleano H empleando el algoritmo considerado.

1. El árbol que determina la distribución de subgrafos vacíos de arista contiene 20 vértices pendientes, cada uno de los cuales corresponde a un subgrafo vacío de arista (fig. 3.40, *b*).

2. Cuatro subgrafos vacíos de arista forman cortes del grafo dado: $E_1 = \{2, 5, 8\}$, $E_2 = \{1, 6, 8\}$, $E_3 = \{4, 7, 9\}$, $E_4 = \{3, 7, 10\}$.

3. Coloramos las aristas del grafo dado G empleando el cubrimiento de columnas por filas de una tabla binaria, en la cual a una fila le corresponde biunívocamente un subgrafo vacío de arista obtenido en el punto 2, a una columna le corresponde una arista; en la intersección de la i-ésima fila con la j-ésima columna se halla 1, si el i-ésimo subgrafo vacío de arista contiene la j-ésima arista y 0 en el caso contrario (tabla 3.4).

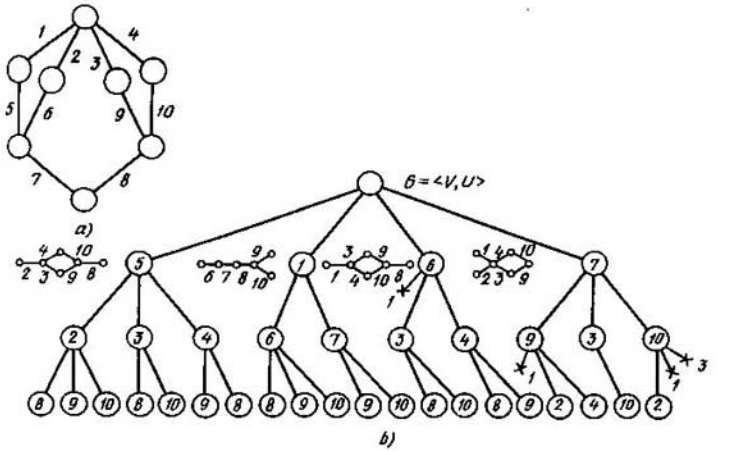


Fig. 3.40

Tabla 3.4

E_i	e_j									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
{2, 5, 8}		1			1			1		
{1, 6, 8}	1					1		1		
{4, 7, 9}				1			1		1	
{3, 7, 10}			1				1			1

Tenemos cuatro coloraciones $R_i(G)$ del grafo G:

$R_1(G) = \{\{2, 5, 8\}, \{1, 6\}, \{4, 7, 9\}, \{3, 10\}\}$,
$R_2(G) = \{\{2, 5, 8\}, \{1, 6\}, \{4, 9\}, \{3, 7, 10\}\}$,
$R_3(G) = \{\{2, 5\}, \{1, 6, 8\}, \{4, 7, 9\}, \{3, 10\}\}$,
$R_4(G) = \{\{2, 5\}, \{1, 6, 8\}, \{4, 9\}, \{3, 7, 10\}\}$.

4. Comprobamos, si cada conjunto de aristas concoloreadas forma corte del grafo. En cada coloración existen vértices concoloreados que no son corte del grafo dado: {1, 6}, {3, 10}, {4, 9}, {2, 5}. Para cumplir las condiciones del teorema 3.38 es necesario eliminar del

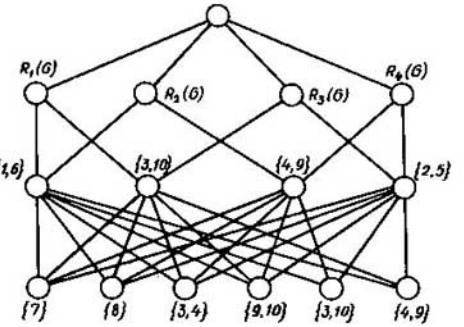


Fig. 3.41

grafo cualquier elemento del conjunto {{7}, {8}, {3, 4}, {9, 10}, {3, 10}, {4, 9}} eligiendo la correspondiente coloración de aristas del grafo G (fig. 3.41). Si la interpretación de objeto del problema requiere que se haga realidad esta equivalencia no por medio de reducir la signatura, sino por extender el portador, entonces las correspondientes aristas se sustituyen por una cadena; además, es indispensable que no se interrumpa el principio par. El problema de determinar la reducción mínimal de la signatura o la extensión mínimal del portador del grafo G se reduce al cubrimiento de la correspondiente tabla binaria. En el ejemplo dado escogemos la arista 7 y, cambiándola por una cadena de longitud 3, obtenemos el grafo homeomorfo $\tilde{G}$ equivalente al grafo dado G y el que posee la propiedad encajable en el espacio booleano. Empleando la primera coloración $R_1(G)$ coloramos las aristas {2, 5, 8}, {1, 6, 11}, {4, 7, 9}, {3, 10, 12} del grafo G (fig. 3.42, *a*).

5. Ponemos los conjuntos de aristas concoloreadas en correspondencia a los órdenes del vector binario: $x_1 = \{2, 5, 8\}$, $x_2 = \{1, 6, 11\}$, $x_3 = \{4, 7, 9\}$, $x_4 = \{3, 10, 12\}$. Condificando los vértices del grafo G, realicemos el encaje fáctico del grafo $\tilde{G}$ en el espacio booleano (fig. 3.42, *b*).

Teorema 3.39. *Si G es un grafo de dos partes y su potencia es igual a $s(G)$,*

$$H(G) = s(G). \tag{3.24}$$

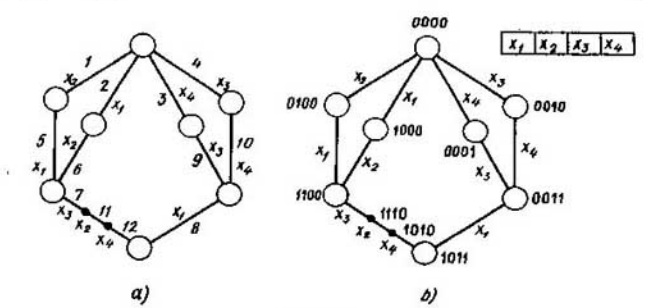


Fig. 3.42

Teorema 3.40. *La clase cromática de cualquier grafo completo sobre n vértices* $H(K_n) = n$, *si n es impar* ($n \neq 1$) *y* $H(K_n) = n - 1$, *si n es par.*

Demos el algoritmo exacto de la coloración minimal de los vértices (las aristas) del grafo G, es decir, el algoritmo para determinar el número cromático $h(G)$ (la clase cromática $H(G)$):

1. Escogemos el conjunto de subgrafos vacíos (vacíos de arista) del grafo G.

2. Construimos una tabla bidimensional, a cada fila de la cual le ponemos en correspondencia biunívoca un subgrafo vacío; a cada columna, un vértice (una arista): en la célula (i, j) escribimos la unidad, si el j-ésimo vértice (j-ésima arista) se contiene en el i-ésimo subgrafo vacío, en caso contrario, la célula queda vacía.

3. Determinamos el cubrimiento de columnas por filas. Todo cubrimiento genera la coloración. El cubrimiento de potencia minimal determina el número cromático (la clase cromática) del grafo G.

En el caso de un grafo grande $G = \langle V, U \rangle$, cuyo portador es de potencial igual a varios centenares o millares, examinemos el algoritmo siguiente que emplea propiedades de frecuencia del grafo:

1. Realizando $|U|$ comparaciones determinamos un par de vértices adyacentes v_α y v_β del grafo $G = \langle V, U \rangle$, para el cual la funcional

$$\varphi(\{v_\alpha, v_\beta\}) = \frac{|\Gamma v_\alpha \cap \Gamma v_\beta|}{|\Gamma v_\alpha| + |\Gamma v_\beta|} \tag{3.25}$$

toma el valor maximal. La igualdad de esta funcional a cero significa que la arista $\{v_\alpha, v_\beta\}$ no se incluye en el triángulo. Cuanto mayor es el valor (3.25), tanto más denso es un subgrafo que puede comprender esta arista.

2. El par de vértices hallados se pinta y los ponemos en correspondencia biunívoca a las columnas de una tabla bidimensional, a las filas de la cual comparemos biunívocamente los vértices adyacentes, por lo menos, a un vértice colorado; en la célula (i, j) ponemos 1, si el i-ésimo y el j-ésimo vértices son adyacentes y 0, en caso contrario.

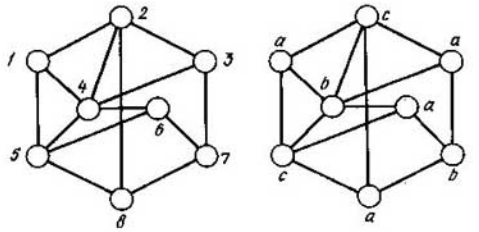
3. Escogemos la fila con el número maximal de unidades.

4. Si para la i-ésima fila escogida en el p. 3 existe una j-ésima columna en la intersección con la cual se halla 0, coloreamos el i-ésimo vértice en el j-ésimo color y encolamos los vértices pintados con el mismo j-ésimo color. En caso contrario coloramos el i-ésimo vértice en un color nuevo aumentado en una unidad el número de columnas en la tabla.

5. Si queda por lo menos un vértice no coloreado pasamos al punto 3, en caso contrario, al punto 6.

6. El fin.

El número de colores para pintar los vértices del grafo $G = \langle V, U \rangle$ es igual al número de columnas en la tabla final.



a) *b)* Fig. 3.43

Ejemplo 3.16. Coloramos los vértices del grafo $G = \langle V, U \rangle$ (fig. 3.43, *a*) empleando el algoritmo examinado.

1. Debido a (3.25), el valor maximal de la funcional $\varphi(\{v_\alpha, v_\beta\})$ es igual a 0,25 cuando consideramos los vértices 1 y 4.

$\max\limits_{\alpha,\ \beta} \varphi(\{v_\alpha, v_\beta\}) = 0{,}25$ cuando $v_\alpha = 1$ y $v_\beta = 4$.

2. Obtenemos la tabla (tabla 3.5).

3. Escogemos la primera fila.

4. Pintamos el vértice 2 de un color nuevo obteniendo como resultado una tabla nueva (tabla 3.6).

5. Existen los vértices no colorados; por lo tanto, pasamos al punto 3.

3. Escogemos la primera fila.

4. El vértice 3 correspondiente a la primera fila es del mismo color que el vértice 1, pintamos el vértice 3 y lo adherimos al vértice 1. Obtenemos la tabla 3.7.

Tabla 3.5

$v_i \in \Gamma v_j$	v_j	
	1	1
2	1	1
3	0	1
5	1	1
6	0	1

Tabla 3.6

$v_i \in \Gamma v_j$	v_j		
	1	4	2
3	0	1	1
5	1	1	0
6	0	1	0
8	0	0	1

Tabla 3.7

$v_i \in \Gamma v_j$	v_j		
	{1,3}	4	2
5	1	1	0
6	0	1	0
7	1	0	0
8	0	0	1

Realizando sucesivamente este algoritmo obtenemos las tablas 3.8 (*a*, *b*, *c*).

Tabla 3.8,a

$v_i \in \Gamma v_j$	v_j		
	{1,3}	4	{2,5}
6	0	1	1
7	1	0	0
8	0	0	1

Tabla 3.8,b

$v_i \in \Gamma v_j$	v_j		
	{1, 3, 6}	4	{2, 5}
7	1	0	0
8	0	0	1

Tabla 3.8,c

$v_i \in \Gamma v_j$	v_j		
	{1, 3, 6}	{4, 7}	{2, 5}
8	0	1	1

En definitiva se obtiene la coloración del grafo dado $G = \langle V, U \rangle$ en tres colores (fig. 3.43, *b*): $a = \{1, 3, 6, 8\}$, $b = \{4, 7\}$, $c = \{2, 5\}$. La densidad del grafo G es igual a tres. Por consiguiente, la coloración obtenida es minimal.

§ 3.8. Caracterización de la coloración de los grafos

El problema de caracterización (el más importante en la matemática discreta) se considera como resuelto, si están halladas las construcciones que determinan el sentido de la transformación que se realiza.

Examinemos la estructura de subgrafos que determinan el número cromático del grafo.

Se denomina *grafo casi completo* $Q(q)$ un grafo Q, para cuya coloración minimal se necesitan q colores, mientras que para la coloración de todo grafo parcial propio Q', $Q' \subset \subset Q$, basta tener q' colores, $q' < q$. En este caso, el número de colores q se llama *casi densidad del grafo casi completo* Q.

La casi densidad $q(G)$ de un grafo G se determina por la expresión

$$q(G) = \max_i q_i(Q_i), \quad Q_i \subset G. \tag{3.26}$$

El orden $k(Q)$ del grafo casi completo $Q(q)$ es

$$k(Q) = q(Q) - p(Q). \tag{3.27}$$

El orden $k(G)$ del grafo G es

$$k(G) = q(G) - p(G). \tag{3.28}$$

Acordémonos designar el grafo casi completo Q de la densidad p y del orden k por medio de $Q(p, k)$ y el grafo de las mismas características, mediante $G(p, k)$.

Los grafos casi completos $Q(2, 0)$, $Q(2, 1)$, $Q(2, 2)$ y $Q(2, 3)$ están representados en la fig. 3.44 (*a, b, c, d*).

Teorema 3.41 (propiedad principal de los grafos casi completos). *Para cualquier vértice v_i de un grafo casi completo Q existe tal coloración de sus vértices que no deja que exista el vértice v_α ($\alpha \neq i$) que sea del mismo color que v_i.*

□Realizamos la demostración partiéndonos de lo contrario. Sea que tal coloración no existe, es decir, realizando toda coloración de los vértices del grafo Q existe un vértice v_α ($\alpha \neq i$) del mismo color que v_i. Pero entonces, al eliminar las aristas incidentes al vértice v_i, obtenemos que el número de colores no varía, lo que contradice a la definición de grafo casi completo. ■

Corolario. Al eliminar cualquier arista de un grafo casi completo, su casi densidad disminuye en 1.

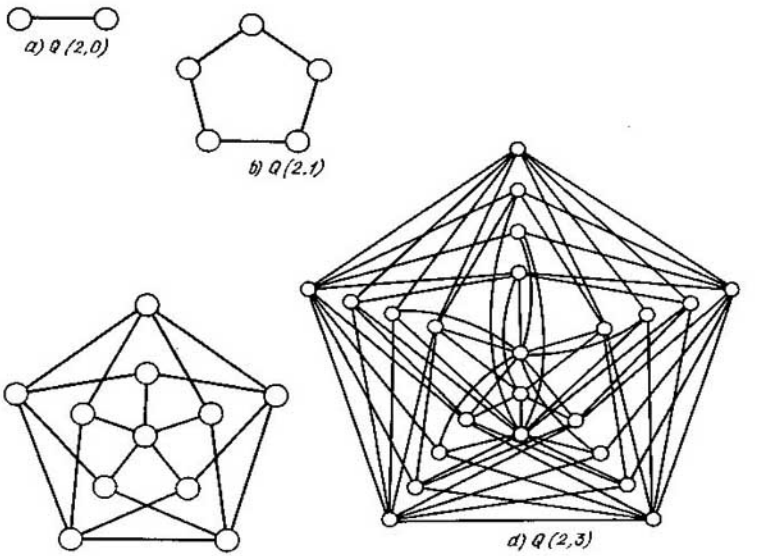


Fig. 3.44

El teorema 3.41 es base de la demostración de la estructura de un grafo casi completo $Q(q)$ con la casi densidad q; el grafo casi completo $Q(q)$ comprende la base es decir un grafo casi completo $Q(q-1)$ y las capas sustituyente y cerradora. En virtud de la propiedad principal de los grafos casi completos, los vértices de la capa sustituyente corresponden biunívocamente a los vértices de la base con tal que los vértices correspondientes son adyacentes a los mismos vértices pertenecientes a la base $Q(q-1)$. Los vértices de la capa sustituyente y los de la base parecen ser «sosias». La capa cerradora representa los vértices que conifican los vértices de la capa sustituyente. En el límite, la capa cerradora es un vértice que conifica toda la capa sustituyente.

Examinemos la formación del grafo casi completo $Q(2, k)$ que posee propiedades extremales, es decir, las potencias de su portador y su signatura son minimales en comparación con otros grafos casi completos de densidad 2 y orden k. En virtud del teorema 3.41, cuanto menos sea la potencia del portador o de la signatura de la base, $Q(2, k-1)$ tanto menores serán las respectivas potencias del grafo casi completo $Q(2, k)$. La base del grafo $Q(2, 1)$ la representa el grafo $Q(2, 0)$ (fig. 3.44, *a*) que es la arista $\{a, b\}$;

la capa sustituyente la representan dos vértices a' y b' que son respectivamente adyacentes a b y a. La capa cerradora es un vértice que conifica los vértices a' y b'. Como resultado obtenemos un ciclo de longitud 5 (fig. 3.44, *b*).

De manera análoga continuamos el proceso de construcción de los grafos, tomamos $Q(2, 1)$ como la base (fig. 3.44, *b*) y así obtenemos el grafo $Q(2, 2)$ (fig. 3.44, *c*); tomando el grafo $Q(2, 2)$ como base obtenemos el grafo casi completo $Q(2, 3)$ (fig. 3.44, *d*). Continuando este proceso se puede construir el grafo casi completo $Q(2, k)$ con potencias minimales del portador y de la signatura para cualquier k.

Determinemos la dependencia de la potencia minimal del portador del grafo $Q(2, k)$ respecto de su orden k. Tenemos

k $\quad | V_{\min}(Q(2, k)) |$,

0 $\quad 2$,

1 $\quad 2 \cdot 2 + 1$,

2 $\quad 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1$,

3 $\quad 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1) + 1$,

. . . . . .

k $\quad \underbrace{2 \cdot (2 \cdot (\ldots 2 \cdot}_{(k-1) \text{ llave}} (2 \cdot 2 + 1) + 1 \ldots) + 1) + 1$.

Por lo tanto,

$$| V_{\min}(Q(2, k)) | = 2 \cdot (2 \cdot (\ldots 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1 \ldots) + 1) + 1 = 2^{k+1} + 2^{k-1} +$$

$$+ 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2^1 + 2^0 = \sum_{i=0}^{k+1} 2^i - 2^k = \frac{2^{k+1} \cdot 2 - 2^0}{2 - 1} - 2k =$$

$$= 4 \cdot 2^k - 2^k - 1 = 3 \cdot 2^k - 1.$$

Así, en definitiva tenemos

$$| V_{\min}(Q(2, k)) | = 3 \cdot 2^k - 1. \tag{3.29}$$

Hallemos la dependencia de la potencia minimal de la signatura del grafo $Q(2, k)$ respecto de su orden. Conforme a la estructura de los grafos casi completos y su propiedad principal, la suma de las potencias de la signatura de la base $Q(2, k-1)$ y de la signatura de la capa sustituyente es igual a la potencia triplicada de la signatura de la base $Q(2, k-1)$, cuando se construye el grafo $Q(2, k)$ con la potencia minimal de la signatura. En virtud de (3.29), la potencia de la signatura de la capa cerradora es igual a la potencia del portador de la base $3 \cdot 2^{k-1} - 1$.

De aquí la potencia minimal de la signatura $| U_{\min}(Q(2, k)) |$ del grafo $Q(2, k)$ es igual a

1 cuando $k = 0$,

$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1$ cuando $k = 1$,

$3 \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1) + 3 \cdot 2^1 - 1$ cuando $k = 2$,

$3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1) + 3 \cdot 2^1 - 1) + 3 \cdot 2^2 - 1$ cuando $k = 3$.

. . . . . .

$3 \cdot \underbrace{(3 \cdot (3 \ldots 3 \cdot}_{k-1 \text{ llave}} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1) + 3 \cdot 2^1 - 1) + 3 \cdot 2^2 - 1) + \ldots + 3 \cdot 2^{k-2} - 1) + 3 \cdot 2^{k-1} - 1$ cuando $k = k$.

Simplificando sucesivamente la expresión para $|\, U_{\min}(Q(2,\ k))\,|$, obtenemos

$$|\, U_{\min}(Q(2,\ k))\,| = 3^k + 3^k \cdot 2^0 - 3^{k-1} + 3^{k-1} \cdot 2^1 - 3^{k-2} + 3^{k-2} \cdot 2^2 - 3^{k-3} + \ldots + 3^1 \cdot 2^{k-1} - 3^0 = 3^k + \sum_{i=1}^{k} 3^i \cdot 2^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} 3^i = 3^k + 3 \cdot (3^k - 2^k) - 0{,}5 \cdot (3^k - 1),$$

$$2\,|\, U_{\min}(Q(2,\ k))\,| = 7 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 1. \tag{3.30}$$

Sumando el grafo casi completo $Q(2,\ k)$ y un grafo completo de densidad $p - 2$, obtenemos el grafo casi completo $Q(p,\ k)$ que posee las propiedades extremales a examinar:

$$Q(2,\ k) + Q(p - 2,\ 0) = Q(p,\ k). \tag{3.31}$$

Al generalizar (3.31) tenemos el teorema siguiente.

Teorema 3.42. *La suma de los grafos casi completos es el grafo casi completo:*

$$\sum_i Q_i(p_i,\ k_i) = Q\left(\sum_i p_i,\ \sum_i k_i\right). \tag{3.32}$$

En virtud de (3.31), la potencia minimal del portador del grafo casi completo $Q(p,\ k)$ es igual a

$$|\, V_{\min}(Q(p,\ k))\,| = 3 \cdot (2^k - 1) + p. \tag{3.33}$$

La potencia minimal de la signatura del grafo $Q(p,\ k)$ se representa como suma de la potencia minimal de la signatura del grafo $Q(2,\ k)$ y la potencia minimal de la signatura de un grafo completo de densidad $(p - 2)$, cada vértice del cual conifica el grafo $Q(2,\ k)$. Debido a (3.29) y (3.30), se tiene

$$|\, U_{\min}(Q(p,\ k))\,| = 0{,}5 \cdot (7 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 1) + 0{,}5 \cdot (p - 2) \cdot (p - 3) + (p - 2) \cdot (3 \cdot 2^k - 1).$$

En definitiva, obtenemos

$$2\,|\, U_{\min}(Q(p,\ k))\,| = 7 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k \cdot (p - 3) + (p - 3)^2 - p + 2. \tag{3.34}$$

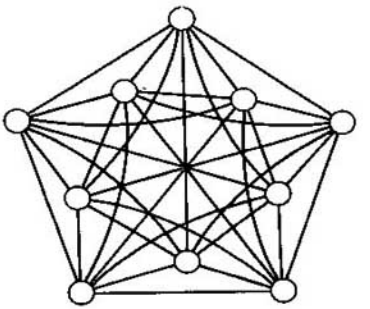


Fig. 3.45

En virtud de (3.33), todo grafo casi completo de primer orden y de densidad p contiene no menos de $p + 3$ vértices. El grafo $Q(p, 1)$ que tiene exactamente $p + 3$ vértices es la suma de un ciclo de longitud 5 y de un grafo completo de densidad $p - 2$:

$$Q(p, 1) = Q(2, 1) + Q(p - 2, 0).$$

Las correlaciones (3.33) y (3.34) son válidas para todos grafos casi completos de densidad 2 ó 3 y para grafos casi completos indescomponibles según la operación aditiva «suma». Anteriormente fue considerada la estructura de estos grafos. Estas fórmulas no son válidas para los grafos casi completos descomponibles que, debido al teorema 3.42, tienen la densidad no menos de 4 y por lo menos dos sumandos $k_i > 0$. Por ejemplo, el grafo casi completo $Q(4, 2)$ que es la suma de dos grafos $Q_a(2, 1)$ y $Q_b(2, 1)$ (fig. 3.45) $Q(4, 2) = Q_a(2, 1) + Q_b(2, 1)$, tiene la potencia del portador igual a 10 y la potencia de la signatura igual a 35, mientras que las potencias minimales del portador y de la signatura del grafo casi completo indescomponible $Q(4, 2)$ son iguales a 13 y 43, respectivamente [de acuerdo con (3.33) y (3.34)].

Teorema 3.43. *El número cromático $h(G)$ del grafo G es igual a su casi densidad $q(G)$:*

$$h(G) = q(G). \tag{3.35}$$

□Debido a la definición del grafo casi completo,

$$h(G) \geqslant q(G).$$

Demostremos que en esta correlación siempre tiene lugar la igualdad. Escogemos todos los *grafos casi completos no incluibles,* es decir, los grafos para cada Q_i, de los cuales no existe un grafo casi completo Q_a tal que $Q_i \subset \subset Q_a$. En virtud de (3.26), entre los subgrafos escogidos existe por lo

menos uno que necesita q colores para pintarlo. Mostremos que para la coloración minimal de la parte restante de $G \setminus Q$ son sifucientes los mismos q colores. En efecto, si para la coloración minimal del subgrafo $G \setminus Q$ necesitamos al menos un color nuevo, $(q+1)$-ésimo, eso significa que en el subgrafo $G \setminus Q$ existen las capas sustituyente y cerradora, lo que lleva a formar un grafo casi completo de casi densidad $q+1$. Lo último contradice a la correlación (3.26). ■

Empleando las fórmulas (3.33)—(3.35) para los grafos G_i de densidad $p(G_i)<4$ y para los grafos que no contienen subgrafos casi completos descomponibles según la cópula «suma», se puede proponer estimaciones logarítmicas del número cromático. Tenemos:

$$h(G) = q(G) = \max_i (p(Q_i) + k(Q_i)) \leqslant$$

$$\leqslant \max_i P(Q_i) + \max_i k(Q_i), \tag{3.36a}$$

$$h(G) \leqslant p(G) + \max_i k(Q_i),\ Q_i \subset G,\ G = \langle V, U \rangle. \tag{3.36b}$$

Según (3.33)

$$\max_i k(Q_i) \leqslant \left[\log_2 \frac{|V| - p(G)}{3} + 1 \right].$$

De aquí

$$h(G) \leqslant p(G) + \left[\log_2 \frac{|V| - p(G)}{3} + 1 \right]. \tag{3.37}$$

En la expresión (3.34) $(p-3)^2 - p + 2 > 0$ y para $p>4$, $p=4$ y cualquier k $6 \cdot 2^k - 1 > 0$, por eso

$$\max_i k(Q_i) < \left[\log_3 \frac{2|U|}{7} \right],\ p(G) \geqslant 4;$$

por consiguiente,

$$h(G) \leqslant p(G) + \left[\log_3 \frac{2|U|}{7} \right],\ p(G) \geqslant 4. \tag{3.38a}$$

Cuando $p(G) = 3$ tenemos

$$h(G) \leqslant 3 + \left[\log_3 \frac{2|U| + 1}{7} \right]. \tag{3.38b}$$

Cuando $p(G) = 2$ la expresión (3.34) obtiene la forma

$$2 \mid U_{\min}(Q(2, k)) \mid = 7 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 1 > 7 \cdot 3^k - 6 \cdot 3^k + 1 = 3^k + 1,$$

por eso

$$\max_i k(Q_i) < [\log_3(2 \mid U \mid - 1)].$$

De aquí cuando $p(G) = 2$ obtenemos

$$h(G) \leqslant 2 + [\log_3(2 \mid U \mid - 1). \tag{3.38c}$$

De acuerdo con la estructura del grafo casi completo $Q(p, k)$ la potencia $s(v_i)$ de cada vértice v_i de este grafo satisface la desigualdad

$$s(v_i) \geqslant q(Q) - 1 = p + k - 1. \tag{3.39}$$

Entonces, según la fórmula (3.33) la potencia de la signatura $\mid U(Q(p, k)) \mid$ del grafo casi completo indescomponible satisface la igualdad

$$\mid U(Q(p, k)) \mid \geqslant 0{,}5 \cdot (3 \cdot (2^k - 1) + p) \cdot (p + k - 1). \tag{3.40}$$

Para los grafos completos se puede lograr esta estimación cuando $k = 0$.

En virtud de (3.33), (3.36a) y (3.40),

$$h(G) \leqslant \left[\frac{2 \cdot \mid U(\tilde{G}) \mid}{\mid V(\tilde{G}) \mid} \right] + 1, \quad \tilde{G} \subset G, \tag{3.41}$$

donde el subgrafo G verifica todas las desigualdades del sistema

$$\begin{aligned} &\mid V(\tilde{G}) \mid \geqslant 3 \cdot (2^k - 1) + p(\tilde{G}), \\ &2 \mid U(\tilde{G}) \mid \geqslant 7 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k \cdot (p(G) - 3) + (p(G) - 3)^2 - p(\tilde{G}) + 2, \\ &s(v_i) \geqslant p(\tilde{G}) + k - 1, \ v_i \in \tilde{G}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

es decir, conforme a sus recursos, tanto de vértices como de aristas, y según la topología local (potencias de los vértices), el subgrafo $\tilde{G}$ puede incluir un grafo casi completo $Q(p, k)$, donde

$$k = \left[\log_2 \left(\frac{V(\tilde{G}) - p(\tilde{G})}{3} + 1 \right) \right]. \tag{3.43}$$

Aquí, [ ] es la parte entera del número. Es obvio, que

$$\left[\frac{2 \mid U(\tilde{G}) \mid}{\mid V(\tilde{G}) \mid} \right] = \left[\frac{1}{\mid V(\tilde{G}) \mid} \sum_{v_i \in V(\tilde{G})} s(v_i) \right] = [s_{\text{med}}(\tilde{G})].$$

De aquí tenemos la estimación superior del número cromático $h(G)$ del grafo G:

$$h(G) \leqslant [s_{\text{med}}(\tilde{G}) + 1], \tag{3.44}$$

donde el grafo $\tilde{G} \subset G$ satisface el sistema de desigualdad (3.42). La estimación (3.44) es más eficaz que las dadas anteriormente $h(G) \leqslant s_{\max}(G) + 1$ y para una clase determinada de grafos, la estimación de Brooks $h(G) \leqslant s_{\max}(G)$.

Al componer las estimaciones (3.37), (3.38) y (3.44), obtenemos estimaciones del número cromático $h(G)$ del grafo $G = \langle V, U \rangle$:
cuando $p(G) \geqslant 4$

$$h(G) \leqslant \min\left(p(G) + \left[\log_2\left(\frac{|V(G)| - p(G)}{3} + 1\right)\right],\right.$$
$$\left. p(G) + \left[\log_3 \frac{2 \cdot |U(G)|}{7}\right], \right. \tag{3.45a}$$
$$\left. [s_{\text{med}}(\bar{G})] + 1\right);$$

cuando $p(G) = 3$

$$h(G) \leqslant \min\left(p(G) + \left[\log_2\left(\frac{|V(G)| - p(G)}{3} + 1\right)\right],\right.$$
$$\left. p(G) + \left[\log_3 \frac{2 \cdot |U(G)| + 1}{7}\right], \right. \tag{3.45b}$$
$$\left. [s_{\text{med}}(\bar{G}) + 1\right);$$

cuando $p(G) = 2$

$$h(G) \leqslant \min\left(2 + \left[\log_2\left(\frac{|V(G)| - 2}{3} + 1\right)\right],\right.$$
$$\left. 2 + [\log_3(2 \cdot |U(G)| - 1), [s_{\text{med}}(\bar{G}) + 1\right). \tag{3.45c}$$

Para calcular la estimación del número cromático $h(G)$ del grafo G, basándose en la fórmula (3.44), hallamos la densidad $p(G)$ del grafo G y disminuyendo p de $p(G)$ a 2 con el paso 1, según la fórmula (3.43) hallamos k para cada uno de estos valores. Debido a (3.36a), la suma máximal de p y del valor correspondiente de k, para los cuales se cumplen las desigualdades del sistema (3.42), determina la estimación superior del número cromático $h(G)$. Si el grafo estimado es casi completo o la estimación superior obtenida coincide con la inferior, ésta es igual al número cromático.

La estimación inferior del número cromático

$$h(G) \geqslant p(G) \tag{3.46}$$

se minora por la estimación de Geller, como lo fue mostrado por Mayers y Lean,

$$h(G) \geqslant \left[\frac{|V(G)|^2}{|V(G)|^2 - 2|U(G)|}\right], \tag{3.47}$$

o

$$h(G) \geqslant \left[\frac{|V(G)}{|V(G)| - s_{\text{med}}(G)}\right]. \tag{3.48}$$

Las estimaciones del número cromático (3.37), (3.38), (3.44) y (3.45) minoran las estimaciones superiores conocidas del $h(G)$.

Ejemplo 3.17. Examinemos el grafo $G = \langle V, U \rangle$ (fig. 3.46, *a*).

Según las estimaciones de Brooks y Geller, su número cromático $h(G)$ se encierra en el segmento [1, 7]:

$$\left[\frac{|V(G)|^2}{|V(G)|^2 - 2|U(G)|}\right] = \left[\frac{10^2}{10^2 - 2 \cdot 20}\right] = 1,$$

$s_{máx}(G) = 7$; $1 \leqslant h(G) \leqslant 7$.

Estimemos el número cromático $h(G)$ empleando las estimaciones superiores obtenidas. La densidad del grafo G es igual a 4: $p(G) = 4$. Conforme a (3.43),

$$k(G) = \left[\log_2\left(\frac{10 - 4}{3} + 1\right)\right] = 4.$$

Si es posible incluir $Q(4, 1)$ en el prefijado dado G, la potencia de todo vértice no tiene que ser menor que 4. Los vértices *c*, *d*, *f* tienen potencia menor que 4 y, por consiguiente, no se incluyen en el grafo $Q(4, 1)$. Eliminando estos vértices en el grafo obtenido (fig. 3.46,*b*), k conserva su valor:

$$k = \left[\log_2\left(\frac{7 - 4}{3} + 1\right)\right] = 1,$$

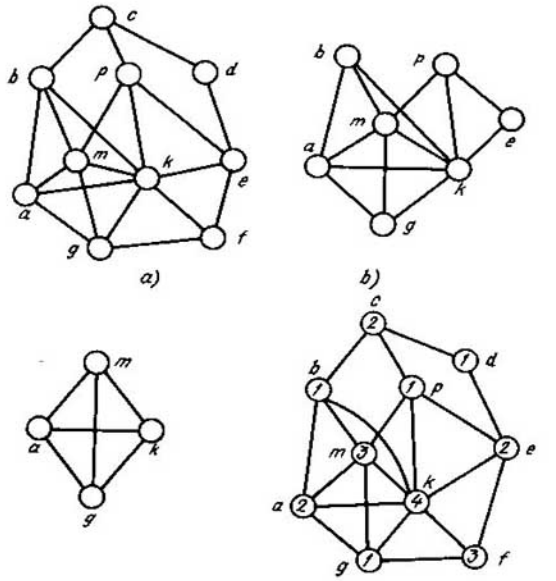


Fig. 3.46

pero con esto los vértices b, p, e no pueden incluirse en este grafo, ya que su potencia (fig. 3.46,b) es menor que 4. Eliminamos los vértices b, p, e del grafo G' (fig. 3.46,b) y obtenemos el grafo representado en la fig.3.46,c que no puede contener el grafo $Q(4, 1)$ conforme al recurso de vértices, ni conforme al de aristas, ni conforme a la topología local. Por consiguiente $k_{máx} = 0$ cuando $p = 4$.

Disminuimos la densidad en una unidad y definimos el valor máximo de k:

$$k(G) = \left[\log_2\left(\frac{10-3}{3}+1\right)\right] = 1.$$

Por lo tanto, el grafo prefijado no puede contener el grafo casi completo $Q(3, 2)$. Disminuimos otra vez la densidad en una unidad y definimos el valor máximo de k, cuando $p = 2$. Tenemos

$$k(G) = \left[\log_2\left(\frac{10-2}{3}+1\right)\right] = 1.$$

De este modo el grafo dado incluso no contiene el grafo casi completo $Q(2, 2)$. De aquí la estimación superior del número cromático $h(G)$ del grafo G es igual a 4. Esta coincide con la estimación inferior $p(G) \leqslant h(G)$; por consiguiente, el número cromático del grafo prefijado es también igual a 4: $k_1 = \{b, d, p, g\}$, $k_2 = \{a, c, e\}$, $k_3 = \{m, f\}$, $k_4 = \{k\}$ (fig. 3.46, d).

Así pues, el empleo de caracterización de la coloración de vértices del grafo permite, en el caso dado, determinar su número cromático sin buscar el cubrimiento mínimal de los subgrafos vacíos por los vértices del grafo.

Según el teorema 3.42, para un grafo G que contiene un grafo casi completo descomponible, con dos sumandos por lo menos, cuyo $k_i > 0$, el número cromático $h(G)$ es igual a la suma de los números cromáticos de los grafos casi completos que son sumandos del grafo $Q(q) \subset G$ de casi densidad máxima. Por esta razón

$$h(G) = \max_i q_i(Q_i) = \max_i \sum_j q_{ij}(Q_{ij}),$$

$$Q_{ij} \subset Q_i,\ Q_i = \sum_j Q_{ij},$$

$$h(G) = \max_i \sum_j (p_{ij}(Q_{ij}) + k_{ij}(Q_{ij})) \leqslant \max_i \sum_j p_{ij}(Q_{ij}) + \max_i \sum_j k_{ij}(Q_{ij}),$$

$$h(G) \leqslant p(G) + \max_i \sum_j k_{ij}(Q_{ij}), \qquad (3.49)$$

donde $\max_i \sum_j k_{ij}(Q_{ij})$ se determina basándose en (3.33), (3.34) y (3.39).

Ejemplo 3.18. Determinemos el número cromático $h(G)$ del grafo $G = \langle V, U \rangle$ con los siguientes parámetros: $|V| = 90$, $|U| = 1000$, $p(G) = G$; la distribución de potencias de los vértices es tal: 20 vértices son de potencia 5; 61 vértices son de potencia 21, los demás 9 vértices tienen la potencia igual a 86.

Analicemos los casos de la descomposición de 6 en sumandos: 1) $6 = 6 + 0$; 2) $6 = 2 + 4$; 3) $6 = 2 + 2 + 2$; 4) $6 = 3 + 3$.

Caso 1. Determinemos el orden máximo $k_{máx}$ del grafo casi completo indescomponible $Q(6, k_{máx})$ de densidad 6. Según (3.33),

$$k_{máx} = \left]\log_2\left(\frac{90-6}{3}+1\right)\right[= 4.$$

Establezcamos si el grafo G prefijado puede contener el grafo casi completo $Q(6, 4)$ según los recursos de aristas y la topología local (según las potencias de los vértices).

Tenemos:

$$|U| > 0{,}5\cdot(7\cdot 3^4 + 6\cdot 2^4\cdot(6-3) + (6-3)^2 -$$
$$- 6 + 2) = 0{,}5\cdot(567 + 288 + 5) = 430,$$
$$|V_{\min}(Q(6, 4))| = 3(2^4 - 1) + 6 = 51,$$
$$(\forall v_i \in Q(6, 4)))(s(v_i) \geqslant 6 + 4 - 1 = 9).$$

De este modo se obtiene la respuesta positiva. Por lo tanto, resulta determinada la estimación superior: $h(G) \leqslant 10$.

Caso 2. El grafo casi completo $Q(q_{\text{máx}})$ de casi densidad máxima puede descomponerse en dos sumandos:

$$Q_a(2, k_a) + Q_b(4, k_b);$$

además, $h(G) \leqslant 6 + \max(k_a + k_b)$. Hallemos $\max\limits_{a,\ b}(k_a + k_b)$. Para eso determinamos

$$k_a = \left[\log_2\left(\frac{(90-4)-2}{3} + 1\right)\right] = 4,$$
$$|V_{\min}(Q(2, 4))|^3 = 3\cdot(2^4 - 1) + 2 = 47.$$

El segundo sumando contiene 43 vértices:

$$90 - 47 = 43.$$

Cuando

$$k_b = \left[\log_2\left(\frac{43-4}{3} + 1\right)\right] = 3,$$
$$|V_{\min}(Q(4, 3))| = 3\cdot(2^3 - 1) + 4 = 25,$$
$$(\forall v_i (v_i \in Q_a(2, 4)))(s(v_i) \geqslant p_a + k_a - 1 +$$
$$+ |V_{\min}(Q_b(4, 3))| = 2 + 4 - 1 + 25 = 30),$$
$$(\forall v_i (v_i \in Q_b(4, 3)))(s(v_i) \geqslant p_b + k_b - 1 +$$
$$+ |V_{\min}(Q(2, 4))| = 4 + 3 - 1 + 47 = 53).$$

En el grafo G no existen vértices de tales potencias. Continuamos los cálculos análogos y hallamos $\max\limits_{a,\ b}(k_a + k_b) = 2 + 2 = 4$, es decir, el grafo G puede contener el grafo casi completo $Q(10)$ descomponible en forma de suma:

$$Q_a(2, 2) + Q_b(4, 2).$$

En efecto,

$$|V_{\min}(Q_a(2, 2))| = 3\cdot(2^2 - 1) + 2 = 11,$$
$$|V_{\min}(Q_b(4, 2))| = 3\cdot(2^2 - 1) + 4 = 13,$$
$$(\forall v_i \in Q_a(2, 2))(s(v_i) \geqslant 2 + 2 - 1 + 13 = 16),$$
$$(\forall v_i \in Q_b(4, 2))(s(v_i) \geqslant 4 + 2 - 1 + 11 = 16),$$
$$|U_{\min}(Q_a(2, 2))| + |U_{\min}(Q_b(4, 2))| + |V_{\min}(Q_a(2, 2))| \cdot |V_{\min}(Q_b(4, 2))| =$$
$$0{,}5\cdot(7\cdot 3^2 + 6\cdot 2^2\cdot(2-3) + (2-3)^2 - 2 + 2) + 0{,}5\cdot(7\cdot 3^2 + 6\cdot 2^2\cdot(4-3) +$$
$$+ (4-3)^2 - 4 + 2) + 11\cdot 13 = 206.$$

En este caso, la estimación cromática $h(G)$ no cambia. Ofrecemos al lector que él mismo examine los demás casos. En definitiva, obtenemos $\max\limits_{a,b}(k_a, k_b) = 4$.

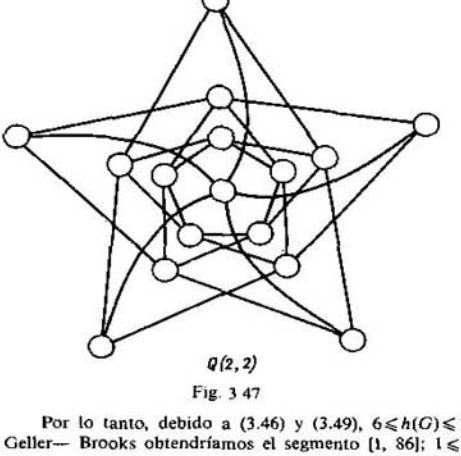


Fig. 3.47

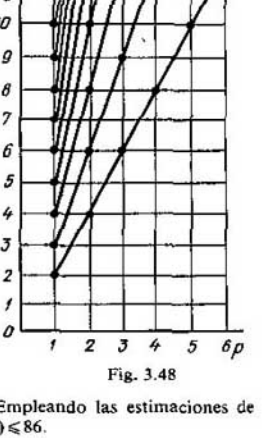


Fig. 3.48

Por lo tanto, debido a (3.46) y (3.49), $6 \leqslant h(G) \leqslant 10$. Empleando las estimaciones de Geller— Brooks obtendríamos el segmento [1, 86]; $1 \leqslant h(G) \leqslant 86$.

Según (3.35), los grafos casi completos de casi densidad $\alpha + 1$ son figuras prohibidas de la coloración de los vértices del grafo con α colores.

Citemos las propiedades de los grafos casi completos.

1^0. *Propiedad de inclusión*

$$Q(p, k) \supset Q(i, j), \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 0, \ldots, k. \tag{3.50}$$

2^0. *Propiedad idempotente de la capa sustituyente. Cambiando la capa sustituyente quedamos en la clase de los grafos casi completos, con tal que esta sustitución puede realizarse muchas veces* (fig. 3.47).

Teorema 3.44. *Si en vez cada vértice v_i de un grafo casi completo $Q(q)$ ponemos uno de los elementos del conjunto $\{Q_i(q_i)/q_i(Q_i) = \alpha\}$, obtenemos el grafo casi completo $Q(\alpha \cdot q)$.*

Teorema 3.45 (teorema de M.V.Gorbátova). *El grafo casi completo $Q(p, k)$, $k > 1$, no posee el carácter arista.*

Si un grafo posee carácter arista, su orden no supera 1. Cuando se construye el grafo derivado en arista $\bar{G}$ según el grafo G, las aristas incidentes a un mismo vértice del grafo $\bar{G}$ corresponden a los vértices de un subgrafo completo del grafo G.

Por consiguiente,

$$a \leqslant H(G) \leqslant s + 1, \tag{3.51}$$

donde $H(G)$ es la clase cromática del grafo G, s es su potencia, $s = \max_i s(v_i)$, $v_i \in G$.

Para un multigrafo

$$s \leqslant H(G) \leqslant s + p, \tag{3.52}$$

donde p es paralelismo del multigrafo, o sea, el número máximo de aristas paralelas.

En la correlación (3.52), la potencia del grafo G y su paralelismo satisfacen las siguientes correlaciones (fig. 3.48):

$$\begin{cases} s \equiv 0 \pmod{p}, \\ s \neq p, \end{cases} \tag{3.53}$$

donde la notación $s \equiv 0 \pmod{p}$ significa que el número s es compatible según el módulo p con el número 0. Según (3.52) y (3.53), obtenemos la estimación de Shannon.

$$H(G) \leqslant \left[\frac{3}{2}\, s\right]. \tag{3.54}$$

Teorema 3.46. *El grafo casi completo de casi densidad q contiene un subgrafo homeomorfo a un subgrafo completo, cuya densidad equivale a q.*

Este teorema permite enlazar la coloración de los grafos con la propiedad de su encaje en las superficies.

Teorema 3.47. *El grafo $G(p, k)$, $k > 1$, $p > 2$ es no encajable en el plano.*

□En efecto, el grafo $G(p, k)$ contiene el subgrafo casi completo $Q(3, 2)$ el cual, a su vez, contiene un subgrafo $G_H(F(5))$ homeomorfo a un subgrafo completo de densidad 5:

$$G(p, k) \supset Q(3, 2) \supset G_H(F(5)).$$

Por consiguiente, según el teorema 3.17 el grafo G no es encajable en el plano. ■

Teorema 3.48. *El grafo $G(p, k)$, $p > 3$, $k > 0$, no es encajable en el plano.*

□En efecto, el grafo $G(p, k)$ contiene un subgrafo $Q(4, 1)$, cuya base y el vértice de la capa sustituyente se incluyen en el subgrafo $G_H(F(5))$ homeomorfo a un subgrafo vacío de densidad 5:

$$G(p, k) \supset Q(4, 1) \supset G_H(F(5)).$$

Por consiguiente, según el teorema 3.17, el grafo G no es encajable en el plano. ■

A base de los teoremas 3.47 y 3.48, obtenemos la demostración del problema de cuatro colores (teorema 3.49).

Teorema 3.49. *El número cromático del grafo planar no supera a cuatro.*

□Según el teorema 3.17, el grafo planar G no contiene el subgrafo $G_H(F(5))$ homeomorfo a un subgrafo completo de densidad 5: $G \not\supset \not\supset G_H(F(5))$. Por lo tanto, este grafo no contiene los subgrafos $Q(3, 2)$ y $Q(4,1)$. De aquí en virtud del teorema 3.41, el número cromático $h(G)$ no supera a cuatro. ■

§ 3.9. Problemas y ejercicios

3.1. Demostrar la igualdad

$$S = (A^+)\cdot(P(A^-)^\tau)$$

donde S es una matriz de adyacencia; A^+ y A^- son matrices de incidencias inicial y final, respectivamente; P es una matriz diagonal de los pesos de los arcos; $^\tau$ es el signo de transposición.

3.2. Demostrar que

$$S = \sum_{k=1}^{q} \xi_k \cdot R^k,$$

donde S es la matriz de adyacencia; R^k es la matriz del paso por los arcos de peso ξ_k.

3.3. Demostrar que un subgrafo G es un ciclo si, y sólo si, el producto matricial lógico (regla de multiplicación de fila por columna se define mediante la multiplicación ordinaria y la adición según el módulo dos) de la matriz de incidencia y la matriz ciclomática transpuesta es igual a la matriz cero.

3.4. Demostrar que las cadenas simples de longitud $l (l<q)$ de un grafo prefijado por una matriz de incidencia S se determina mediante la matriz $S_q = \sum_{k=1}^{q} S^k$.

3.5. Sea dado un transmisor que puede transmitir cinco señales: *a, b, c, d, e*. Al recibirlas cada una de estas señales puede interpretarse de dos maneras: la señal *a*: como *p* o *q*, la señal *b*: como *q* o *r*, la señal *c*: como *r* o *s*, la señal *d*: como *s* o *t*, la señal *e*: como *p* o *t*. ¿Qué número máximo de señales se puede recibir sin correr el riesgo de confundirlas una con otra?

3.6. Demostrar que

$$\alpha(G_a \times G_b) \geqslant \alpha(G_a)\cdot\alpha(G_b),$$

donde $\alpha(G_i)$ es el número de estabilidad interior del grafo $G_i = G_a, G_b$.

3.7. Determinar el número de la estabilidad exterior de un grafo G prefijado por la matriz de adyacencia

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

3.8. ¿Cuántas reinas baste colocar en el tablero de ajedrez para que todo escaque del tablero esté amenazado de ataque por lo menos de una de ellas? Creemos que el escaque ocupado por una pieza está también bajo amenaza de ser atacado por esta pieza.

3.9. Demostrar que sobre n vértices dados se puede construir n^{n-2} árboles distintos.

3.10. En el grafo ponderado G prefijado por las matrices

$$S(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$P(G) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$$

hallar el subgrafo conexo G' que tiene la suma minimal de los pesos de sus aristas.

3.11. Un vértice de un grafo se llama punto de articulación, si el grafo se hace inconexo al eliminar este vértice junto con sus aristas incidentes. Se denomina bloque un grafo conexo no trivial que no tiene puntos de articulación. ¿Puede ser bloque un grafo, cuyo número ciclomático $\nu(G) = 2$? Poner un ejemplo del bloque, en el cual la eliminación de una arista conduce a la aparición del punto de articulación. ¿Existe un bloque, en el cual la aparición del punto de articulación se desprende de la eliminación de cualquiera de sus aristas?

3.12. Citar ejemplos de grafos conexos, para los cuales existen cortes cuyo número de aristas es igual al número de cuerdas de los esqueletos.

3.13. Demostrar que la eliminación de una arista perteneciente a cierto ciclo de un grafo conexo no hace este grafo inconexo.

3.14. Un grafo conexo se denomina de Euler, si en él existe una cadena cerrada que pasa por cada una de sus aristas (todas las aristas de la cadena son distintas). Mostrar que un grafo que contiene un puente no puede ser euleriano.

3.15. Un grafo se denomina hamiltoniano, si él contiene un ciclo simple de esqueleto. Poner ejemplos de los grafos que son de Hamilton y de Euler simultáneamente.

3.16. Hallar el número de esqueletos no isomorfos del grafo $K_{2,3}$ de dos partes.

3.17. Demostrar que si un grafo es n-conexo, existe un par de vértices no adyacentes, entre los cuales se encuentran n cadenas simples no intersecantes en vértices. Mostrar que esta condición se cumple para cualesquiera dos vértices no adyacentes del grafo n-conexo. Dar un ejemplo del grafo 3-conexo.

3.18. Mostrar que la precisión de hasta el isomorfismo la tienen exactamente cuatro grafos (uno de los cuales es completo) sin aristas paralelas ni lazos sobre tres vértices, y once grafos, sobre cuatro vértices. Hallar el número de grafos sobre cinco vértices.

3.19. Se denomina núcleo arista de un grafo G un subgrafo que es la unión del conjunto de aristas y_i tales que las aristas de todo conjunto no son adyacentes dos a dos y $|y_i| = \alpha_0(G)$. Dar ejemplos de los grafos que no tienen núcleo arista.

3.20. Hallar condiciones necesarias, para las cuales el número de aristas en el grafo es igual al producto $\alpha_0\beta_0$.

3.21. Demostrar o refutar que para cualquier grafo conexo $\beta_0 \leqslant \varepsilon_0$.

3.22. Determinar $\pi_1(K_{m,n})$ y $\varepsilon_1(K_{m,n})$.

3.23. Demostrar que el ciclo de longitud impar es incajable en un hipercubo n-dimensional.

3.24. Mostrar que el diámetro del n-cubo $d(G_n)$ no puede ser mayor que n.

3.25. Sea que un grafo G comprende k cadenas simples no intersecantes en vértices entre dos vértices $a, b \in G$; las longitudes de todas las cadenas son diferentes. ¿Bajo qué condición este grafo es cubicable?

3.26. Determinar la densidad del grafo que es suma de una arista y un ciclo de longitud 5.

3.27. Hallar el número de la estabilidad interior para el grafo determinado en el ejercicio anterior.

3.28. Hallar el número de la estabilidad exterior para el grafo que es producto de una arista y un ciclo de longitud 4.

3.29. Hallar la coloración minimal de las aristas del grafo de Peterson.

3.30. ¿Posee el carácter arista el grafo que es suma de un vértice aislado y un ciclo de longitud 5?

3.31. Hallar el número cromático del grafo de Peterson.

Comentarios

La teoría de los grafos en calidad de una parte de la matemática discreta tiene muchas interpretaciones. Se aplica con éxito en los problemas de control de la producción, para proyectar redes de los ordenadores, para diseñar módulos electrónicos modernos y proyectar sistemas físicos con parámetros localizados (acústicos, mecánicos, eléctricos), para resolver problemas de genética y problemas de automatización de la proyección (SAPR). La teoría de los grafos es la base del apoyo matemático de los sistemas modernos de procesamiento de la información. Esta teoría se aplica con éxito en las investigaciones nucleares (técnica de diagramas de Feynman), etc.

Información más detallada sobre los modelos teóricos de grafos y sus suplementos se la puede hallar en la literatura de bibliografía.

«Y lo mismo que el concepto de número, el de figura está tomando exclusivamente del mundo exterior y no ha brotado en la cabeza por obra del pensamiento puro».

Federico Engels

CAPÍTULO 4

Teoría de las gramáticas formales y de los dispositivos automáticos

§ 4.1. Gramáticas formales

Examinemos un sistema de sustituciones prefijado por el alfabeto $M = \{m_i/i = 1, \ldots, p\}$ y por las *sustituciones básicas*

$$\alpha_i \rightarrow \beta_i, \tag{4.1}$$

donde α_i, β_i son las fórmulas (palabras) tal vez vacías en el alfabeto M.

Comprenderemos toda sustitución $\alpha_i \rightarrow \beta_i$ como una regla de deducción. Con frecuencia el sistema de sustituciones se denomina *semisistemas* de Thue, en honor del matemático noruego Aksel Thue. Empleando estos semisistemas Chomsky formó y desarrolló el aparato de gramáticas formales.

Definamos el concepto de la *gramática formal* que a continuación se llamará simplemente gramática. Examinemos un alfabeto finito $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, cuyos elementos se denominarán *símbolos* (letras) y sucesiones finitas de símbolos, *palabras*.

Designemos todo el conjunto de palabras, cuyas longitudes no tienen ningunas restricciones mediante $\mathscr{A}_0$. Digamos que $\mathscr{L} \subset \mathscr{A}_0$ es un lenguaje en el alfabeto M.

Sea G una colección de reglas, con ayuda de las cuales en M se engendran todas las palabras pertenecientes al lenguaje $\mathscr{L}$ y sólo ellas. Llámase *gramática del lenguaje* $\mathscr{L}$ la colección de reglas G.

Denominaremos *equivalentes* a dos lenguajes si coinciden los conjuntos de palabras que integran estos lenguajes. Dos gramáticas G_1 y G_2 sobre $\mathscr{L}$ se denominan *equivalentes*, si se engendran por éstas los lenguajes equivalentes.

Acordémonos decir que G es la *gramática del número finito de estados*, si las reglas de engendrar palabras de alfabeto $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ se prefijan del modo siguiente. Existe un conjunto finito de estados $\{S_0, S_1, \ldots, S_r\}$ y a cada $S_j (j = 1, 2, \ldots, r)$ le pone en correspondencia un juego de pares de tipo (m_i, S_q), donde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $q \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Al estado S_0 le pone en correspondencia los pares de tipo (m_0, S_h), donde $h \in \{1, 2, \ldots, r\}$. El símbolo m_0 es un signo especial del blanco entre las palabras. La construcción de las palabras se realiza del modo siguiente: del estado S_0 pasa a cualquier estado S_q, uno de aquellos S_q que son segundos

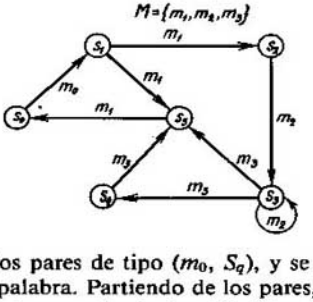


Fig. 4.1

miembros de los pares de tipo (m_0, S_q), y se pone el signo del blanco en el inicio de la palabra. Partiendo de los pares, puestos en correspondencia al S_q elegido, se toma cualquier (m_i, S_j). Esta elección determina el siguiente estado S_l y el primer símbolo de la palabra m_i. En adelante, el proceso de la construcción de la palabra se realiza de modo análogo. La palabra se termina pasando al estado final, que es, como regla, S_0.

El lenguaje generado por una gramática con el número finito de estados se denomina *lenguaje con el número finito de estados.* Es cómodo representar la estructura de tales lenguajes en forma de un grafo, cuyos vértices se ponen en correspondencia a S_j y los arcos, en correspondencia a los pares (m_i, S_q). En la fig. 4.1 se da un ejemplo de tal grafo. Utilizando la gramática, prefijada por este grafo, se engendra un lenguaje compuesto del siguiente conjunto de palabras: $\{m_1m_1,\ m_1m_2m_3m_1,\ m_1m_3m_3m_1\}$. Se puede examinar la generación de las cadenas de los símbolos como resultado del trabajo de un dispositivo hipotético (fig. 4.2). A lo largo de una cinta infinita (a una o dos direcciones) dividida en células se mueve la cabeza de control (CC). Están prefijados un alfabeto exterior $M = \{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, cuyos símbolos se denominan *letras,* un alfabeto interior $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_r\}$, cuyos símbolos se denominan *estados* y un alfabeto de traslaciones $E = \{D, I, N\}$. Todas las células se llenan con los símbolos de M, uno en cada célula. El símbolo m_0 juega el papel del símbolo vacío (si en una célula se halla m_0, entonces «en esta célula no está escrito nada»). Se supone que toda la cinta infinita está llena siempre con los símbolos m_0, excepto aquellas células, en las cuales están escritos cualesquier otros símbolos de M.

La cabeza de control puede mantenerse en varios estados que se caracterizan por los símbolos de S. El estado s_0 es específico. Si la CC se mantiene en el estado s_0, «la máquina no hace ningún trabajo (está desconectada)». Se supone que al final del trabajo la máquina pasa siempre en el estado

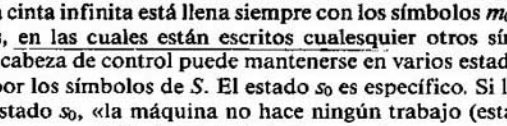


Fig. 4.2

s_0. Durante el trabajo de la máquina la CC puede moverse a lo largo de la cinta en tiempos discretos. Se mueve ora una célula a la derecha (D), ora una célula a la izquierda (I). Puede ocurrir que en un tiempo dado del trabajo la CC no se mueve (N).

En todo tiempo del trabajo la CC realiza las siguientes operaciones: 1) lee el símbolo m_i que está en la célula «vista» por la CC en este tiempo; 2) en relación con el símbolo leído m_i y su estado s_j escribe el símbolo m_k en esta célula; 3) se mueve (o no) a lo largo de la cinta; 4) pasa al estado siguiente s_p.

Se puede representar todo el trabajo de la máquina utilizando una tabla funcional T, en cuyas células se encuentran las ternas de tipo $m_k s_p e_l$, donde $e_l \in E$ es un símbolo que determina la traslación. De este modo, la tabla funcional determina la aplicación $M \times S$ en $M \times S \times D$. El sentido enjundioso de la aplicación $(m_i, s_j) \rightarrow (m_k s_p e_l)$ consiste en que permaneciendo en el estado s_j y leyendo el símbolo m_i de la célula, la CC escribe el símbolo m_k en la célula dada de la cinta, pasa al estado s_p y realiza la traslación determinada por el símbolo e_l. Acordémonos que la tabla funcional está siempre hecha de modo que tiene lugar la aplicación $(m_i, s_0) \rightarrow (m_i, s_0, N)$. Esto significa que en el estado «desconectado» la máquina no funciona.

Hasta que la máquina empiece a funcionar es necesario llenar (si esto es indispensable) unas células de la cinta con los símbolos diferentes de m_0, trasladar la CC a un estado distinto de s_0 y prefijar la posición inicial de la CC respecto a la cinta. Después de esto la máquina funcionará en correspondencia con la tabla T. El funcionamiento de la máquina puede ser prefijado utilizando también un grafo, cuyos vértices se ponen en correspondencia biunívoca a los estados de este dispositivo, los arcos, en correspondencia con las traslaciones de un estado a otro. Con ello cada arco (s_j, s_p) está ponderado por el par $(m_i, m_k e_l)$. Según Chomsky, frecuentemente el estado se denomina *símbolo no terminal* (auxiliar) y el símbolo $m_i \in M$ se denomina *terminal*. El dispositivo hipotético descrito se denomina *máquina de Turing*.

Tesis de Post. *Un semisistema arbitrario de Thue puede representarse como una máquina de Turing y viceversa.*

En el capítulo 1 fue examinada la definición intuitiva del concepto de algoritmo. Empleando la máquina de Turing, precisemos este concepto.

Tesis de Turing. *Para cualquier algoritmo comprendido en sentido intuitivo, se puede construir una máquina de Turing, cuyo funcionamiento es equivalente a este algoritmo.*

El concepto de la máquina de Turing es una especificación estricta del concepto del algoritmo. El paso del concepto intuitivo del algoritmo al concepto exacto de la máquina de Turing posibilita llegar a la resolubilidad algorítmica (de máquina) de uno u otro problema.

En 1936, el científico norteamericano Church, examinando el problema de reconocer la deducibilidad en la lógica matemática, obtuvo uno de los primeros resultados negativos.

En el cálculo lógico para cualesquiera fórmulas dadas R y S determinemos, si existe o no una cadena deductiva que conduce de R a S.

A y B son las fórmulas *adyacentes,* si se puede transformar la fórmula A en la B, y viceversa, utilizando una sola vez la sustitución admisible. Una sucesión $(A_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ de fórmulas, entre las cuales las contiguas son adyacentes, se denomina *cadena deductiva* que conduce de A_1 a A_n. Como la resolución del problema de reconocer la deducibilidad se comprende un algoritmo que responde existe o no una cadena deductiva (para cualesquiera R y S).

Un problema es *irresoluble algorítmicamente,* si no existe ningún algoritmo (correspondiente máquina de Turing) para resolverlo. La máquina de Turing independiente puede ser representada como un programa de forma arbitraria para un ordenador con la memoria potencialmente infinita.

Teorema 4.1 (teorema de Church). *El problema de reconocimiento de la deducibilidad es algorítmicamente irresoluble.*

Siguiendo a Chomsky, introduzcamos las restricciones de las sustituciones $\alpha \rightarrow \beta$, observando al mismo tiempo, la correspondencia entre la gramática obtenida y el dispositivo automático.

Restricción 1. Si $\alpha \rightarrow \beta$ satisface la expresión (4.1), o sea, es una regla de deducción, entonces

$$(\exists a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n (m \leqslant n))((\alpha = a_1 a_2 \ldots a_m) \& (\beta = b_1 b_2 \ldots b_n)). \tag{4.2}$$

En lenguaje generado por la gramática que satisface (4.2) se realiza por la máquina de Turing.

Restricción 2. Si $\alpha \rightarrow \beta$ es una regla de deducción, entonces ($\exists \gamma_1, \gamma_2$, a, $\omega(\gamma_1, \gamma_2, \omega$ son las cadenas, a es un símbolo independiente; ω no es vacía).

$$((\alpha = \gamma_1 a \gamma_2) \& (\beta = \gamma_1 \omega \gamma_2)). \tag{4.3}$$

Las gramáticas que satisfacen la relación (4.3) se denominan *de contexto (vinculadas por el contexto).*

Las gramáticas de contexto se realizan mediante los dispositivos tipo de autómata de Myhill.

Sea (i, j, k, l, p) una de las reglas que determina el funcionamiento del dispositivo automático: si el bloque de mando permanece en el estado S_j y la cabeza exploradora está frente a la célula que contiene el símbolo m_i, entonces el bloque de mando puede pasar al estado S_k, mientras que la cinta avanza hasta l células a la izquierda y m_p sustituye el símbolo a examinar. El dispositivo que funciona según este principio se llama *autómata de Myhill.*

Restricción 3. Si $\alpha \rightarrow \beta$ es una regla de deducción, entonces α es la letra no terminal y β no es vacía:

$$\beta \neq \varnothing \tag{4.4}$$

La gramática que satisface (4.4) se llama *sin contexto* (*libre del contexto*).

De acuerdo a (4.4), cada regla de gramática afirma que cierto símbolo no terminal puede sustituirse por una cadena de símbolos independientemente del contexto.

Un lenguaje generado por una gramática sin contexto se realiza por un dispositivo automático de Myhill de tipo especial que utiliza la memoria jerárquica. Según Newell, Shaw y Simon, este dispositivo automático se denominará *autómata jerárquico.*

El autómata jerárquico es una composición de *un dispositivo automático de mando* y de tres *cajas,* cada una de las cuales representa de por sí una cinta infinita dirigida a un lado. En la cinta está escrita una palabra, cuya primera letra se encuentra en la primera célula, la segunda está en la segunda célula, etc. Leyendo la palabra el dispositivo automático percibe la primera letra, luego la borra y el resto de la palabra se desplaza hacia la primera célula. Cuando en la caja se graba una palabra de la longitud k, las primeras k células se libran como resultado de haber trasladado en k células la palabra anteriormente inscrita. La caja de entrada está vinculada con los canales de entrada del dispositivo automático de mando, la de salida, con los canales de salida, la interior se vincula tanto con los canales de entrada, como con los de salida del dispositivo automático de mando. El *conjunto de estados interiores del* dispositivo automático de mando se parte en dos subconjuntos A y B. Si el estado del dispositivo automático de mando pertenece al subconjunto A, se lee la información de las cajas de entrada e interior. Si su estado pertenece a B, $S_i \in B$, la lectura se hace sólo de la caja interior. Al mismo tiempo, el dispositivo automático pasa al estado siguiente y escribe palabras en las cajas interior y de entrada.

Una regla de la gramática sin contexto se denomina *lineal*, si tiene forma

$$A \rightarrow xBy; \tag{4.5}$$

lineal derecha, si

$$A \rightarrow xB, \tag{4.6}$$

y *lineal izquierda,* si

$$A \rightarrow Bx. \tag{4.7}$$

La regla de forma $A \rightarrow x$ llámase *conclusiva.* Según las restricciones determinadas por las reglas (4.5)—(4.7), la gramática sin contexto puede ser:

a) *lineal,* si cada regla suya no conclusiva es lineal, en particular, si es lineal izquierda o lineal derecha;

b) *unilateralmente lineal,* si cada regla suya no conclusiva es lineal izquierda o lineal derecha;

c) *metalineal,* si todas sus reglas no conclusivas ora son lineales, ora tienen forma $S \rightarrow \beta$ y, además, la gramática no posee reglas tipo $A \rightarrow \alpha S \beta$ para ningunos A, α, β, donde α, β no son vacías.

La gramática unilateralmente lineal se realiza por el *dispositivo automático finito* y engendra un lenguaje llamado *automático finito.*

Consideremos una gramática unilateralmente lineal, cuyas reglas son todas lineales derechas (para más precisión) o todas conclusivas. Sin perder la generalidad, se puede suponer que toda regla lineal tiene forma $A \rightarrow aB$ (donde B es un símbolo no inicial) y cada regla conclusiva de la gramática tiene forma $A \rightarrow a$.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los símbolos no terminales de la gramática, con la particularidad de que A_1 es el *símbolo inicial.* A la gramática le ponemos en correspondencia un dispositivo automático finito, cada uno de los estados interiores del cual corresponde biunívocamente a un símbolo no terminal de la gramática, y el símbolo de entrada corresponde a un símbolo terminal de la misma. Además, si $A_i \rightarrow aA_j$ es una regla de la gramática, la terna (a, A_i, A_j) determina el funcionamiento del dispositivo automático y se comprende como el paso del estado A_i al estado A_j, cuando se lee el símbolo de entrada a.

Para más generalidad, consideraremos que, pasando del estado S_i al estado S_j como resultado de la influencia de entrada a, el dispositivo automático elabora un símbolo b a su entrada. Entonces el dispositivo automático puede ser como una cuaterna (a, b, S_i, S_j).

Si se fija el *estado inicial* S_0, el dispositivo autómatico realiza un operador T

$$b = T(a, S_i, S_j).$$

A continuación lo denominaremos *de autómata.*

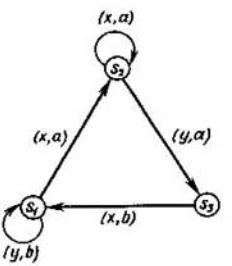


Fig. 4.3

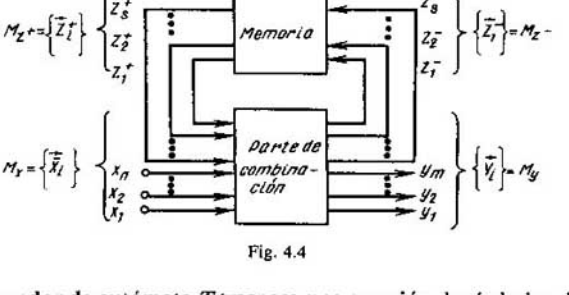


Fig. 4.4

El operador de autómata T traspasa una sucesión de símbolos de entrada (a_i) en una sucesión de salida (b_i) según el estado inicial y la gramática unilateralmente lineal realizable. Es cómodo representar el dispositivo automático en forma de la función T sobre un grafo $G = \langle V, U \rangle$, a cada vértice del cual le corresponde biunívocamente un estado del dispositivo automático. Si éste pasa del estado S_i al estado S_j bajo la influencia de entrada a, elaborando, al mismo tiempo, el símbolo de salida b, entonces los vértices correspondientes v_i y v_j se unen mediante el arco (v_i, v_j) ponderado por el par (a, b). De tal modo, el campo de definición de esta función T es el grafo $G = \langle V, U \rangle$ construido por medio del procedimiento anteriormente examinado. El campo de valores son los símbolos de entrada y salida y los identificadores de los estados del dispositivo automático.

Por ejemplo, examinemos una gramática unilateralmente lineal con el alfabeto de símbolos terminales $M_T = \{x, y, a, b\}$, con el alfabeto de los símbolos no terminales $M_N = \{S_1, S_2, S_3\}$ y las siguientes reglas de deducción: $S_1 \rightarrow ybS_1$, $S_1 \rightarrow xaS_2$, $S_2 \rightarrow xaS_2$, $S_2 \rightarrow yaS_3$, $S_3 \rightarrow xbS_1$. Un dispositivo automático finito realiza esta gramática. Si ponemos este autómata en el estado inicial S_1 y a la entrada transmitimos una sucesión de símbolos terminales (y, x, y, x), obtenemos a la salida la sucesión de los símbolos terminales (b, a, a, b), cuando los símbolos no terminales forman la sucesión (S_1, S_1, S_2, S_3). El operador de autómata realizable T puede representarse en forma de la función correspondiente sobre el grafo $G = \langle V, U \rangle$ (fig. 4.3).

Si no examinemos el dispositivo automático como un dispositivo que realiza una gramática correspondiente, sino estudiemos su estructura, entonces hay que representar éste no en forma de la máquina de Turing, sino en forma del esquema en bloque representado en la fig. 4.4, donde M_x es el conjunto de símbolos terminales de entrada; M_y es el conjunto de símbolos terminales de salida; M_z es el conjunto de símbolos no terminales ($M_z = M_{z'}, M_{z''}$).

§ 4.2. Etapas principales del diseño de los dispositivos automáticos

Analicemos el problema de diseño del dispositivo automático. En la fig. 4.4 tenemos M_x, significa el *conjunto de vectores de entrada*

$$X = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n};$$

M_y es el *conjunto de vectores de salida*

$$Y = y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \ldots y_m^{\sigma_m};$$

M_{z^-} es el conjunto de vectores que caracterizan los *canales de entrada* de realimentación (canales de memoria)

$$Z^- = (z_1^-)^{\sigma_1} (z_2^-)^{\sigma_2} \ldots (z_s^-)^{\sigma_s},$$

M_{z^+} es el conjunto de vectores que caracterizan los *canales de salida de realimentación*

$$Z^+ = (z_1^+)^{\sigma_1} (z_2^+)^{\sigma_2} \ldots (z_s^+)^{\sigma_s}.$$

Si tenemos la lógica de k signos, cada uno de los canales puede estar en uno de sus k valores $\sigma \in (0, 1, \ldots, k-1)$.

Acordémonos designar la variable α, igual a $\sigma \in (0, 1, 2, \ldots, k-1)$ como α^σ. Entonces, para la gramática de autómata, es más cómodo definir las reglas de deducción como sustitución $XZ^+ \to Z^- Y$, en la cual el valor inicial del vector Z^+ y sus valores sucesivos se obtienen al igualarlos al valor del vector Z^- calculado en el paso anterior, o sea,

$$Z^+(t=0) = Z_0^+, \; Z^+(t+\tau) = Z^-(t),$$

donde τ es una constante de tiempo.

Los vectores XZ^+ y $Z^- Y$ se obtienen añadiendo los vectores Z^+ e Y a la derecha de X y Z^-, respectivamente.

A continuación, los estados de los canales de realimentación se denominarán *estados interiores del dispositivo automático*, mientras que la constante de tiempo τ se llamará *tiempo de transición* de un estado interior en otro con la particularidad de que, según la destinación del dispositivo automático y su realización, τ puede ser constante para el dispositivo automático dado o depender de la variación del vector X. En el primer caso el dispositivo automático se denomina *sincrónico*, en el segundo, asincrónico.

Para un $(Z^+)_0$ prefijado, la sucesión de los vectores de entrada X(*sucesión de entrada*) determina unívocamente la sucesión de los vectores de salida Y(*sucesión de salida*). Lo ilustremos analizando el siguiente ejemplo.

Sea que tenemos un dispositivo con el canal de entrada x, un canal de realimentación z y un canal de salida y que realiza la aplicación $XZ^+ \to Z^- Y$ prefijado en forma de una tabla (tabla 4.1).

Tabla 4.1

x	z^+	z^-	y
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Tabla 4.2

Tiempo	x	z^+	z^-	y
0	1	0	0	1
τ	0	0	1	1
2τ	1	1	0	0
3τ	0	0	1	1
4τ	0	1	1	0
5τ	1	1	0	0

Determinemos la sucesión de salida, si la de entrada tiene forma 101001 y el valor inicial del vector Z^+ es igual a 0. En el instante inicial de tiempo, el vector XZ^+, igual a 10, determina $Z^- Y = 01$ (la tercera fila de la tabla). Dentro de un intervalo de tiempo τ, $XZ^+ = 00$ determinará $Z^- Y = 11$ (la primera fila), etc. Anotemos la definición de la sucesión de salida en forma de la tabla 4.2.

Por consiguiente, $101001 \xrightarrow{Z_0^+ = 0} 110100$.

Según la aplicación de autómata prefijada para $Z_0^+ = 1$ la sucesión de entrada 101001 se transforma en la sucesión de salida 010100.

De tal modo, la aplicación de autómata $XZ^+ \to Z^- Y$ determina unívocamente la sucesión de salida (Y_i) por la sucesión de entrada dada (X_i) y el estado interior inicial Z_0: $(X_i) \xrightarrow{Z_0^+} (Y_i)$.

Una de las características principales del dispositivo automático es la capacidad de su memoria. El número de estados interiores del dispositivo automático se denomina *capacidad de memoria del dispositivo automático.*

Como se sabe, la transformación de la información es resultado de haber realizado un algoritmo, con ello el *autómata operacional* realiza los pasos del algoritmo y el dispositivo *automático de mando,* el orden de cumplir los pasos. Los dispositivos automáticos operacional y de mando difieren por su destino y también por la capacidad de memoria. En el dispositivo automático operacional se transforma la información prefijada en forma de cierto conjunto de números inscritos en registros. La capacidad de memoria del dispositivo automático operacional es prácticamente infinito. Por ejemplo, el bloque de registros de un ordenador moderno, que integra el dispositivo automático operacional y consta de 22 registros binarios de 16 órdenes, tiene capacidad de memoria igual a $2^{352} > 10^{100}$ bitios. La capacidad de memoria de los dispositivos automáticos de mando suele tener de unas decenas a unas decenas de miles de bitios, o sea, no es grande en comparación con la capacidad de memoria de los dispositivos automáticos operacionales.

Examinemos la interacción de los dispositivos automáticos operacional y de mando (fig. 4.5). A la entrada del dispositivo automático operacional

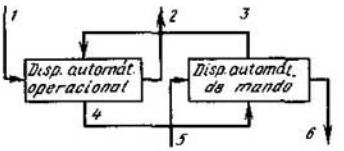


Fig. 4.5

(canal *1*) llega una información que se transforma; de la salida del dispositivo automático operacional (canal *2*) se toman los resultados de las transformaciones; por el canal *3* llegan las acciones de mando correspondientes al algoritmo que se realiza; por el canal *4* llegan a la entrada del dispositivo automático de mando los indicios que caracterizan la información que está por transformar; por el canal *5* llega la señal que determina la transformación a cumplir y su comienzo; por el canal *6* sale la señal fin de la operación. Los canales *1* y *2* se denominan *informativo*, los de *3* a *6* se denominan *de control*. Por ejemplo, examinemos como se cumple la operación de adición en el dispositivo aritmético (DA) de un ordenador. En este caso el dispositivo automático operacional es el dispositivo aritmético, o sea, los registros, el sumador y las comunicaciones entre ellos, el dispositivo automático de mando es el de mando del DA. Cuando se efectúa el algoritmo de adición, el primero y el segundo sumando sacados del dispositivo de memoria (DM) del ordenador se inscriben por el canal *1* en los correspondientes registros del DA; por el canal *5* del dispositivo central de mando (DCM) del ordenador llega el código de la operación («adición»), por el canal *3* del dispositivo de mando del DA, conforme al algoritmo de adición, se envían las señales de mando: el desplazamiento de registros, la excitación de las barras correspondientes en el sumador, la inscripción de la suma en el registro del resultado y otras señales. Por el canal *4* llegan los indicios (por ejemplo, el contenido de los órdenes de signo en el sumador que se utiliza para detectar la infracción de la normalización) que determinan la marcha del mando sucesivo. Por el canal *6* se transmite al DCM la señal de que la operación se ha realizado.

El ordenador es un transformador complejo de la información. Según V.M.Glushkov, es conveniente considerarlo como una *composición de pares de los dispositivos automáticos*, cada uno de los cuales comprende los dispositivos automáticos operacional y de mando. Además, cada dispositivo del ordenador (de entrada, de salida, el DM, el DCM) se representa, de modo análogo al dispositivo aritmético, como un par o varios pares de tales dispositivos automáticos. Tal representación del ordenador es cómoda para el análisis y la síntesis del ordenador y, también, es el desarrollo lógico de la estructura de los ordenadores modernos. Actualmente, en calidad de un método de aumentar la productividad del ordenador, se utiliza el régimen de programas múltiples, lo que, en particular, disminuye retardos pro-

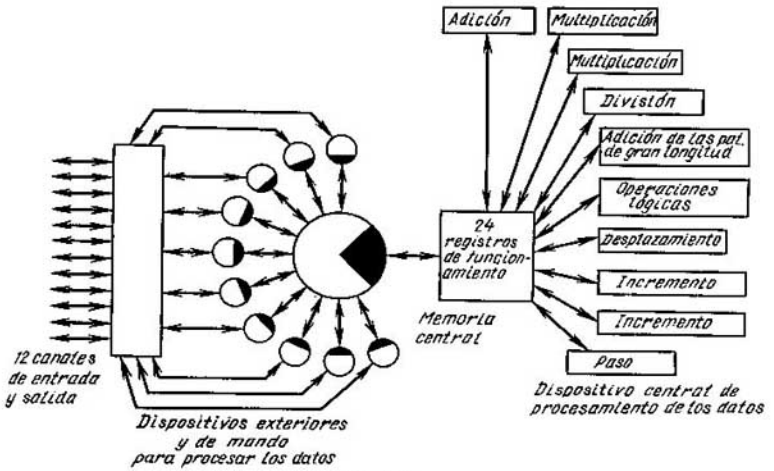


Fig. 4.6

vocados por la baja velocidad de los dispositivos exteriores y la falta de correspondencia entre las velocidades de funcionamiento de los dispositivos aritmético y exteriores. Para realizar el régimen de programas múltiples del ordenador, es indispensable cierta «autonomía» de unidades separadas, es decir, la posibilidad de almacenar y transformar la información y controlar esta transformación dentro de la misma unidad. En otras palabras, es necesario que toda unidad sea una composición de los dispositivos automáticos operacional y de mando. Para ilustrar todo lo dicho, demos el esquema en bloque del ordenador CDC-6600 (fig. 4.6), en el cual la información de entrada llega por 12 canales de entrada y salida y se da primeramente a los dispositivos periféricos de procesamiento de la información. Cada uno de estos dispositivos es una composición de los dispositivos automáticos operacional y de mando. Estos dispositivos de volumen pequeño pueden ora entregar los resultados transformados en el dispositivo de salida, ora transmitirlos, a la memoria central que es toda una jerarquía de dispositivos de memoria. La última operación se cumple con ayuda del sistema centralizado de mando que distribuye el «trabajo» entre los dispositivos especializados de procesamiento de la información que tienen alta velocidad de funcionamiento. Cada uno de estos dispositivos es una composición de los dispositivos autómaticos operacional y de mando. Cada par de tales dispositivos realiza una o varias operaciones, por ejemplo, la operación de multiplicación.

Cuando el ordenador funciona en el régimen de programas múltiples, se realiza el principio del funcionamiento descentralizado de dispositivos separados. En el límite, el principio de descentralización pasa al principio de la descentralización absoluta o al principio de Holland que propuso la red completamente distribuida de los dispositivos de procesamiento de la información, cada uno de los cuales es una composición de los dispositivos automáticos operacional y de mando. Todos estos bloques funcionan independientemente. Esta estructura del ordenador realiza la concepción de los «programas de trabajo nadando en el mar de equipos».

Una de las etapas de desarrollo de esta tendencia es la concepción del *procesamiento distribuido de la información* que en el presente se realiza en forma de redes de ordenadores, centros de cálculos de uso colectivo, etc.

En el diseño de los ordenadores se puede destacar tres etapas principales: *sistémica, lógica y técnica.*

En la etapa de diseño sistémica se construye la composición de pares de los dispositivos automáticos operacionales y de mando (el esquema general en bloque del ordenador), se determinan la capacidad necesaria de memoria de los dispositivos automáticos, su interacción basada en la selección de sistema de instrucciones, lenguajes interiores y exteriores del ordenador, etc. En esta etapa, la información de partida es un conjunto de clases de problemas los que deben ser resueltos por el ordenador a diseñar y de sus parámetros (velocidad de funcionamiento, costo, dimensiones extremas, etc.).

Los dispositivos automáticos examinados en la etapa de diseño sistémica tienen gran capacidad de memoria que supera, como ya lo indicamos, 10^{100} bitios. Por esta razón en el presente los problemas de la etapa sistémica se resuelven empleando la simulación en programas.

En el etapa sistémica, el proceso de resolver el problema por el método de simulación en programas suele tener los siguientes pasos:

a) la composición de un modelo matemático que refleja las propiedades principales del dispositivo en simulación o del ordenador en total;

b) la elaboración de un algoritmo simulador, su registración en un lenguaje destinado para describir los modelos de los ordenadores;

c) la realización del algoritmo simulador en un ordenador;

d) el análisis de los resultados y la corrección del modelo del dispositivo o del ordenador.

La simulación en programas permite determinar las características principales del ordenador a diseñar y los puntos «flacos» de su estructura.

En la etapa de diseño lógico de los ordenadores se sintetizan directamente los esquemas lógicos (funcionales) de todos los bloques del ordenador. Para esta etapa, como la información de partida se presentan los algoritmos de funcionamiento de los bloques.

En la etapa de *diseño técnico* se construyen, basándose en los esquemas lógicos, los esquemas principales de montaje y se prepara la documentación técnica para fabricar los ordenadores.

El *diseño lógico* consiste en la síntesis de los dispositivos automáticos operacionales y también de los de mando. Debido a que la capacidad de memoria de los dispositivos automáticos operacionales es prácticamente infinita, en el presente estos últimos se sintetizan con ayuda de la simulación en programas. Para realizar la síntesis formalizada de los dispositivos automáticos operacionales es necesario desarrollar la teoría de los dispositivos automáticos infinitos, mientras que para formalizar la síntesis de autómatas de mando es posible aplicar la teoría de los dispositivos automáticos finitos.

Según esta teoría, en la proyección de los dispositivos automáticos de mando distinguiremos dos etapas principales: la *construcción del operador de autómata* y la *síntesis estructural del dispositivo automático.*

I. Etapa de la construcción del operador de autómata. En esta etapa se construye el *sistema de funciones de salida* $Y = f(X, Z^+)$ y el *sistema de funciones de excitación* $Z^- = \varphi(X, Z^+)$.

Una *aplicación de autómata* escrita en forma de un sistema de funciones de salida y funciones de excitación se denominará *operador de autómata.*

A su vez, esta etapa se compone de tres subetapas: *algorítmica, abstracta* y *de codificación (distribución) de estados interiores de autómata.*

En la etapa de la proyección algorítmica un operador dado A se formaliza como un algoritmo, partiendo de las exigencias planteadas (la simplicidad de cumplimiento de las operaciones, la velocidad de funcionamiento, la reducción máxima de gastos para los aparatos, etc.). La búsqueda del algoritmo óptimo por el operador dado A se puede representar en forma de un árbol, cada vértice pendiente del cual corresponde a un algoritmo determinado, es decir, a una composición determinada de los dispositivos automáticos operacional y de mando. Para hallar el algoritmo óptimo, tenemos que realizar el sondeo de todos los vértices pendientes, cuyo número no es sabido y se determina por el grafo de desarrollo de las transformaciones que se examinan.

Por ejemplo, sea que es necesario sintetizar un dispositivo aritmético que realiza la operación cuadriádica de sumación. En función del algoritmo elegido para cumplir este trabajo, obtenemos un esquema en bloque determinado del dispositivo a sintetizar que se caracteriza por la velocidad de funcionamiento y gastos para los aparatos. En este caso se puede proponer, por ejemplo, tres variantes del algoritmo.

Variante 1. Sumamos dos primeros números, adicionamos el tercer número a la suma obtenida y otra vez adicionamos el último número a la suma obtenida. Esta variante del algoritmo se caracteriza por el tiempo

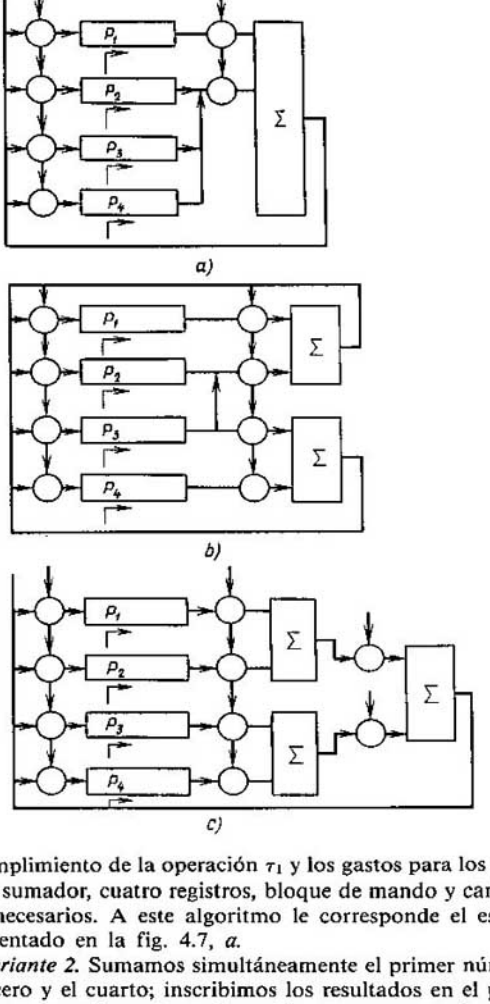


Fig. 4.7

de cumplimiento de la operación τ_1 y los gastos para los aparatos en forma de un sumador, cuatro registros, bloque de mando y canales de comunicación necesarios. A este algoritmo le corresponde el esquema en bloque representado en la fig. 4.7, *a*.

Variante 2. Sumamos simultáneamente el primer número y el segundo, el tercero y el cuarto; inscribimos los resultados en el primero y el tercer registro, respectivamente, y luego los sumamos en el primer sumador. El resultado final lo inscribimos en el primer registro. Esta variante de cumpli-

miento del trabajo A se caracteriza por el tiempo de cumplimiento τ_2 y los gastos para los aparatos representados en el esquema en bloque de esta variante (fig. 4.7, *b*).

Variante 3. Sumamos dos primeros números en un sumador, dos segundos en el segundo sumador, las sumas obtenidas, en el tercer sumador. Inscribimos el resultado en el primer registro. Esta variante se caracteriza por el tiempo de cumplimiento de la operación τ_3 y los gastos para los aparatos dados en la fig. 4.7, *c*.

Una u otra variante del algoritmo que realiza el trabajo A se escoge partiendo de las restricciones concretas para los gastos de aparatos y el tiempo de cumplimiento de las operaciones dadas.

Cada vértice pendiente del árbol de búsqueda se estima por el tiempo de cumplimiento de una transformación dada y la complejidad de los aparatos (la complejidad de los dispositivos automáticos operacional y de mando). La complejidad del dispositivo automático operacional se aprecia por el cálculo inmediato de los gastos de aparatos. Utilizando el concepto de derivada del modelo, se puede apreciar la complejidad del dispositivo automático de mando.

En la etapa abstracta se resuelve el problema de minimizar la capacidad de memoria del dispositivo automático. En la etapa de codificación (distribución) de los estados interiores del autómata a cada uno de ellos se les pone en correspondencia un código, es decir, un conjunto determinado de estados (valores) de elementos de la memoria.

Al cumplir las etapas consideradas componemos los sistemas de funciones de salida y de funciones de excitación del dispositivo automático, o sea, construimos el operador de autómata y luego pasamos a la síntesis estructural.

II. Etapa de la síntesis estructural del autómata. Esta etapa consiste en que de los elementos dados se construye el esquema lógico (funcional) del dispositivo automático que realiza el operador de autómata obtenido. A continuación consideremos la síntesis estructural con más detalles.

§ 4.3. Fundamentos aritméticos de los dispositivos automáticos operacionales

El proceso de cálculo, que realiza un programa en el ordenador representa en sí las transformaciones de números en paralelo y en serie. Cada número es una sucesión de cifras.

La palabra «cifra» proviene de la palabra árabe «sefr» traducida al latín. Ésta, a su vez, es traducción de la palabra sánscrita «suña» (alfabeto «devanagari») que significa «lugar vacío» («orden»), en el cual se pone un signo numérico al dar relaciones cuantitativas.

Llámase *sistema de numeración* o *numeración* una colección de procedi-

mientos y reglas para denotar y denominar los números. El sistema de numeración de las reglas de inscripción codificada de equivalentes cuantitativos permitiendo obtener unívocamente para toda cantidad su inscripción en código y por toda inscripción en código, su respectivo equivalente cuantitativo. Un conjunto de signos elementales que se utilizan para codificar se denominan *cifras* del sistema de numeración.

Sistemas de numeración son *posicionales* y *no posicionales*. En los sistemas no posicionales a cada cifra se le ha puesto unívocamente en correspondencia un equivalente cuantitativo estándar, mientras que el equivalente cuantitativo del código del número se calcula como una función de los equivalentes cuantitativos de las cifras que integran la inscripción de este código. Un ejemplo de tal sistema es el sistema de numeración, en la que se utiliza sólo una cifra, por ejemplo, 1. A esta cifra se le ha puesto en correspondencia el equivalente cuantitativo igual a la unidad. Entonces el código 111 111 significa el equivalente cuantitativo seis; aquí la función para calcular el equivalente cuantitativo del código es la función de adición. En los sistemas posicionales un equivalente cuantitativo se pone en correspondencia no unívoca a cada cifra dependiendo de su posición en el código del número. Examinaremos solamente inscripciones linealmente ordenadas. En la inscripción escojamos el comienzo de la lectura (orden nulo). Los órdenes a la izquierda de éste enumeremos con 1, 2, ... y a la derecha, con $-1, -2, \ldots$. A cada cifra a_i situada en el orden de número j se le pone en correspondencia un equivalente cuantitativo $\varphi(a_i, j)$. La función φ ora es igual para todos los órdenes, ora su forma cambia de orden a orden. A continuación se examinarán solamente los sistemas posicionales de una función φ igual para todos los órdenes. Cualquier sistema posicional se prefija por tres componentes: $\langle A, \varphi, F\rangle$. Aquí A es el *conjunto de las cifras del sistema*; φ es la función que para las cifras en cada orden determina su *equivalente cuantitativo*; F es la función que por los equivalentes cuantitativos de la inscripción del número determina el *equivalente cuantitativo del propio número*.

Según la forma de la función F elijamos dos tipos de sistemas de numeración: *aditivos* y *multiplicativos*. En los sistemas del primer tipo F es la función de *adición*, en los del segundo F es la función de *multiplicación*. No examinaremos otros tipos de F.

Si para cualesquiera cifras A y cualquier j tiene lugar la igualdad $\varphi(a_i, j) = S^j \cdot \varphi(a_i, 0)$, se trata del sistema de numeración *de la base S*. Si $\varphi(a_i, j) = p_j \varphi(a_i, 0)$ y p_j no coinciden para distintos j, el sistema es *de tipo de valores ponderables* y p_j son *pesos* de los órdenes.

Si en un sistema de la base S el conjunto de cifras comprende $0, 1, \ldots, S-1$, el sistema tiene el *conjunto lógico de cifras* (*sistema lógico de numeración*); si $S = m + k + 1$ y el conjunto de cifras es $\{-m, -m+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$, entonces para $m = k$ el sistema tiene el *conjunto simétri-*

co de cifras (*sistema simétrico de numeración*), cuando $k>m$ o $m>k$ el sistema tiene el *conjunto de cifras asimétrico en sentido positivo* o *negativo*, respectivamente, (*sistema asimétrico de numeración*).

Con la mayor frecuencia se usan sistemas lógicos de numeración de la base natural. En un sistema de la base S cualquier número x puede representarse en la forma siguiente:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i)S^i, \tag{4.8}$$

donde (a_i) es el equivalente cuantitativo de la cifra a_i en el orden nulo.

En un sistema lógico de numeración de la base natural S, el desplazamiento de un número entero x en un orden a la derecha significa la división en números enteros de x por S. El resto obtenido es una cifra situada antes del desplazamiento en el orden nulo. El algoritmo de traspasar números enteros de un sistema de numeración de la base natural R a otro de la base natural Q consiste en lo siguiente. Un número x escrito en el sistema de numeración de la base R se divide por Q según las reglas de división en este sistema hasta obtener el resto. Si el cociente de la división no es igual a 0, pasa a ser divisible y el proceso de la división por Q continúa hasta que el cociente obtenido sea igual a 0. Los restos escribimos en el orden inverso de obtenerlos («del último al primero») y así tenemos la denotación del número x en el sistema de numeración de la base Q.

En el sistema lógico de numeración de la base natural S, el desplazamiento del número fraccionario x en un orden a la derecha significa la multiplicación de x por S. La parte entera obtenida, tal vez igual a 0, es una cifra situada en el orden -1 antes del desplazamiento. De aquí, el algoritmo de traspasar números fraccionarios (fracciones R-arias) de un sistema de numeración de la base R a otro de la base Q consiste en lo siguiente. La denotación fraccionaria de un número x se multiplica por Q según las reglas de multiplicación en el sistema de numeración de la base R. En el producto obtenido se separa la parte entera (tal vez, nula). La parte fraccionaria del producto se multiplica otra vez por Q, luego se separa la parte entera del producto, etc. multiplicando k veces con el traspaso de exactitud hasta Q^{-k}. Para obtener la denotación del número x en el sistema de numeración de la base Q (con exactitud de Q^{-k}), después de la coma se escriben todas las partes enteras de los productos según el orden de su obtención.

Examinemos un ejemplo de emplear estos algoritmos para traspasar el número decimal 11,87 al sistema quinario. Dividimos el número 11 por 5 en números enteros: $11 = 2\cdot 5 + 1$, $2 = 0\cdot 5 + 2$. En el sistema quinario el número 11 se denota como 21. Se puede traspasar la parte fraccionaria de 0,87 con exactitud hasta de 5^{-2}: $0{,}87\cdot 5 = 4{,}35$; $0{,}35\cdot 5 = 1{,}75$. Por consiguiente, en el sistema quinario el número 0,87 se denota como 0,41. En definitiva, tenemos $\langle 11{,}87\rangle_{10} = \langle 21{,}41\rangle_5$.

En los sistemas lógicos de numeración que adquirieron la máxima propagación, se puede escribir los números (si la base es natural) solamente

de un signo. En estos sistemas para representar números del otro signo se utiliza el signo especial «+» o «−». Es más conveniente codificar el signo del número con ayuda de cifras utilizadas para escribir el número. Para esto, en la denotación del número se escoge un orden especial llamado *de signo.* La cifra situada en él no codifica el equivalente cuantitativo y no participa en cálculos del equivalente por medio de la función F.

Codificamos el signo «+» con el cero y el signo «−» con la cifra $(S-1)$ en el orden nulo cuando representamos números x, $|x|<1$. Para esto determinemos el código directo de un número x, $|x|<1$ del modo siguiente:

$$[x]_D = \begin{cases} 0.\ x_1x_2\ \ldots\ x_n, \text{ cuando } x \geqslant 0 \\ S-1.\ x_1x_2\ \ldots\ x_n, \text{ cuando } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $|x|<1$, esta correlación puede escribirse en la forma

$$[x]_D = \begin{cases} x, \text{ cuando } x \geqslant 0, \\ S-1+|x|, \text{ cuando } x \leqslant 0. \end{cases}$$

En el presente se usa ampliamente la forma *semilogarítmica* de representación de los números o la representación *de punto flotante.*

En un sistema de numeración de la base natural S, cualquier número x puede expresarse (multiformemente) como $S^{p(x)}m(x)$, donde $|m(x)|<1$. Denominaremos $m(x)$ y $p(x)$ respectivamente *mantisa* y *orden* del número x en el sistema de la base S. Si para un S fijado damos $p(x)$ y $m(x)$, el número x se determina unívocamente. El par $p(x)$ y $m(x)$ está almacenado en la memoria del ordenador. Para representar unívocamente los números en forma semilogarítmica habitualmente es necesario que la mantisa satisfaga la desigualdad $S^{-1} \leqslant m(x) < 1$. La mantisa de este tipo se denomina *normalizada.*

Representando el número para la máquina en el orden más izquierdo se codifica el signo del orden, después en n_1 órdenes se anota el valor del orden, después van el orden para el signo de la mantisa y n_2 órdenes para escribir el valor de la mantisa.

Examinemos la realización de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división en las aritméticas posicionales con el conjunto lógico de cifras. Para cualquier base S, las operaciones de adición y multiplicación se determinan por las tablas de cumplimiento de estas operaciones en un orden y por las reglas de formar traslados a los órdenes superiores. Además, es necesario que en la operación participen los órdenes correspondientes de los sumandos. Por eso, cuando se realiza la adición es también necesario justificar los órdenes de los sumandos (desplazar las mantisas de modo que se sumen los órdenes de números iguales).

Para realizar la adición algebraica, los órdenes se justifican cuando se aumenta un orden inferior hasta un superior. Para que no cambie en este

caso el equivalente decimal del número, es necesario que cada aumento del orden en una unidad se compense por el desplazamiento de la mantisa a un orden a la derecha.

El resultado obtenido toma el orden justificado. Normalizando la mantisa del resultado es necesario desplazarla a la derecha (en un orden) o a la izquierda hasta que se cumplan las condiciones de normalización. Para que al mismo tiempo se conserve el equivalente cuantitativo del número, es necesario aumentar (al desplazar la mantisa a la derecha) o disminuir (al desplazar la mantisa a la izquierda) el orden del resultado en el número de unidades que coincide con el número de desplazamiento.

Durante la sustracción de dos números surgen las complicaciones vinculadas con que se toman prestadas unidades de órdenes superiores. Esta operación se realiza mal en los ordenadores modernos para los sistemas de numeración con un conjunto lógico de cifras y una base natural. Para los sistemas con una base negativa o con una base natural y un conjunto simétrico (asimétrico) de cifras es fácil realizar esta operación: el sustraendo se invierte (o sea, en vez de denotar el número x se denota el número $\to x$ en este sistema) y se suman los códigos obtenidos. Para los sistemas con una base natural y un conjunto lógico de cifras, las operaciones de la adición algebraica se realizan por medio de los *códigos complementario* e *inverso* de estos números.

Cambiemos la operación de sustracción $y - x$ por la operación de adición $y + (S - x)$ después de que sigue la disminución del resultado en S:

$$y - x = y + (S - x) - S. \tag{4.9a}$$

Introduzcamos el concepto *del código complementario* de un número x:

$$[x]_c = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ S + x, & x < 0. \end{cases}$$

La operación de sustracción puede cambiarse por la de adición también a base de la siguiente correlación:

$$y - x = y + (S - S^{-n} - x) - S + S^{-n} \tag{4.9c}$$

De aquí obtenemos la definición *del código inverso* del número x:

$$[x]_I = \begin{cases} x, \text{ cuando } x \geqslant 0, \\ S + x - S^{-n}, \text{ cuando } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.9d}$$

De las correlaciones (4.9b) y (4.9d) obtenemos

$$[x]_c = [x]_I + S^{-n}, \quad x < 0. \tag{4.9e}$$

Según la fórmula (4.9b) el código complementario del número negativo $x \leftrightarrow x_1 x_2 \ldots x_n$, $|x| < 1$, tiene la siguiente forma:

$$[x]_c = (S - 1).\ (S - 1 - x_1)(S - 1 - x_2) \ldots (S - x_n).$$

Según la correlación (4.9e) el código inverso de este número tiene la forma

$$[x]_I = (S-1).\ (S-1-1x_1)(S-1-x_2)\ \ldots\ (S-1-x_n).$$

De esta manera tenemos las siguientes *reglas de formación de los códigos complementario e inverso para los números negativos.*

1. Para obtener el código inverso de un número negativo es necesario en cada orden de la denotación S-aria del número cambiar la cifra de este orden por la que la complementa hasta $S-1$. En el orden de signo hay que escribir la cifra $S-1$.

2. Para obtener el código complementario de un número negativo, es necesario sumar la unidad al orden inferior de su código inverso.

Basándose en las fórmulas (4.9a) y (4.9c) tenemos, respectivamente, las siguientes *reglas de la adición algebraica.*

1. Para realizar la adición algebraica de dos números x e y de signo arbitrario en el sistema de numeración de la base natural S y un conjunto lógico de cifras es suficiente escribir estos números en el código complementario, sumar los códigos obtenidos según las reglas de adición de números en el sistema de la base S y omitir la unidad de traslado del orden de signo, si ella aparece. El resultado obtenido es el código complementario de la suma algebraica de los números x e y.

2. Para realizar la adición algebraica de los números x e y de signo arbitrario en el sistema de numeración de la base natural S y un conjunto natural de cifras, es suficiente escribir estos números en el código inverso, sumar los códigos obtenidos según las reglas de adición de los números en el sistema de la base S y añadir una unidad en el orden inferior de la expresión obtenida, si al sumar aparece la unidad de traslado del orden de signo. El resultado obtenido es el código inverso de la suma verdadera (algebraica) de los números x e y.

Para multiplicar, es necesario sumar órdenes de los factores, multiplicar mantisas según las reglas de multiplicación de los números, normalizar el resultado y, si la mantisa del resultado se ha desplazado, cambiar respectivamente el orden del producto. Cuando se realiza la división, del orden del dividendo se sustrae el orden del divisor. La división de mantisas se sustituye por sustraer el divisor del dividendo hasta obtener la diferencia negativa como resultado de la sustracción de turno. Luego suman el divisor y la diferencia negativa (esta operación se llama *restablecimiento del resto*) y en calidad de cifra del cociente se escribe el número de sustracciones del divisor sin tener en cuenta la última sustracción. Luego el resto se hace dividendo y el papel de divisor lo juega el divisor antiguo desplazado en un orden a la derecha, etc. La mantisa del cociente se normaliza y, respectivamente, cambia el orden del cociente.

Como ya hemos señalado, un sistema de numeración es de valor ponderable, si para todo orden de número j se puede indicar un número p_j tal

que el equivalente cuantitativo correspondiente a una cifra a_i escrita en este orden es igual a $p_j \cdot (a_i)$, donde (a_i) es un equivalente cuantitativo correspondiente a la misma cifra en el orden nulo. A la correlación (4.8) le es análoga la siguiente expresión:

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (a_i) \cdot p_j.$$

En la técnica de cálculo tienen interés los sistemas bidecimales de numeración, en los cuales cada cifra decimal se codifica con cuatro cifras binarias y, por consiguiente, cada orden de la inscripción decimal se sustituye por cuatro órdenes. Si a estos cuatro órdenes les corresponden unos pesos, tiene lugar un sistema de valor ponderable para estos cuatro órdenes binarios.

Al utilizar los sistemas bidecimales en los ordenadores, es deseable que la codificación (es multiforme puesto que para codificar diez cifras se puede usar cualesquiera de 16 tétradas de ceros y unidades) satisfaga unas restricciones. Citemos cinco exigencias principales formuladas por Rutishauser.

1. *Unicidad.* Es necesaria la correspondencia unívoca entre las cifras y las tétradas. Si esta exigencia no se cumple es imposible codificar y decodificar los números. En otras palabras, hace falta codificar distintas cifras decimales con las tétradas diferentes.

2. *Ordenación.* A cifras decimales mayores les deben corresponder tétradas mayores (según el equivalente cuantitativo). Es necesario cumplir esta exigencia cuando se comparan los números codificados.

3. *Paridad.* A las cifras decimales pares les deben corresponder las tétradas pares (que tienen cero (unidad) en el orden derecho extremo), mientras que a las cifras impares, las tétradas impares.

4. *Propiedad complementaria.* Si la suma de cifras del sistema decimal es igual a nueve, a estas cifras les hay que poner en correspondiencia las tétradas mutuamente invertidas (es decir, obtenidas una de otra sustituyendo unidades por ceros y viceversa). Es necesario cumplir esta exigencia para introducir el código complementario o inverso en el sistema bidecimal.

5. *Valor ponderable.* Deben existir cuatro pesos p_1, p_2, p_3 y p_4 tales que, si a una cifra decimal x se le ha puesto en correspondencia una tétrada $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, tiene lugar la igualdad $x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4$.

Una codificación que satisface todas las cinco exigencias se denomina *perfecta.*

Acordémonos designar la tétrada puesta en correspondencia a una cifra decimal x mediante $q(x)$. Consideremos las reglas de adición para los números escritos en el sistema bidecimal. Sean tomadas cifras x e y en el sistema decimal. Entonces $x + y$ es ora una cifra nueva de este sistema (si $x + y < 10$), ora el resultado de sumar estas cifras es la cifra correspondiente a $x + y - 10$ y aparece la unidad de traslado al orden siguiente. Entonces,

en el sistema bidecimal, las reglas de adición tienen forma

$$q(x) + q(y) = \begin{cases} q(x + y), \text{ cuando } x + y < 10, \\ q(x + y - 10) + 16, \text{ cuando } x + y \geqslant 10, \end{cases} \quad (4.10)$$

Aquí la adición de 16 corresponde al traslado de la unidad al orden siguiente (el traslado al orden derecho de la tétrada que está a la izquierda de la dada). Según se desprende de la correlación (4.10), es necesario hacer correcciones, sumando los números en tal sistemas.

Por ejemplo, sea que toda cifra decimal se codifica con su inscripción en el sistema binario empleando cuatro órdenes binarios. En este caso la cifra 5 se codificará con la tétrada 0101. Tal procedimiento de codificación se denomina *código de sustitución directa* (8421). En este caso, teniendo en cuenta que para el código de sustitución directa $q(x) = x$, la correlación (4.10) puede escribirse en la forma

$$q(x) + q(y) = \begin{cases} x + y, \text{ cuando } x + y < 10, \\ x + y + 6, \text{ cuando } x + y \geqslant 10. \end{cases}$$

De este modo, sumando en el código de sustitución directa, es necesario en todo par de tétradas sumar según las reglas de la adición binaria, teniendo en cuenta el traslado entre las tétradas, si este último surge. Después de esto, a los órdenes, donde la suma de las cifras codificadas supera 10, hay que añadir la corrección 0110. Lo ilustremos con el siguiente ejemplo. Sea que haga falta hallar la suma de los números 205 y 768. Cumplamos las operaciones necesarias:

+	205 – 0010	0000	0101	codificación,
	768 – 0111	0110	1000	
	+ 1001	0110	1101	primera sumación
	0000	0000	0110	
973 –	1001	0111	0011	resultado.

El código de sustitución directa satisface todas las exigencias de Rutishauser excepto la cuarta. La infracción de esta exigencia no permite introducir el código complementario o inverso, lo que, a su vez, no permite sustituir la sustracción por la operación de adición. Para cumplir la propiedad complementaria, codifiquemos toda cifra decimal x con la tétrada $q(x)$, igual a $x + 3$. El código obtenido se denomina *código por exceso de tres* o *código* de Stibitz. En este caso la correlación (4.10) toma la siguiente forma:

$$q(x) + q(y) = \begin{cases} x + y + 3, \text{ cuando } x + y < 10, \\ (x + y - 10) + 3 + 16, \text{ cuando } x + y \geqslant 10. \end{cases}$$

De tal modo, en el código por exceso de tres se necesita la corrección +3(0011), cuando $x + y \geqslant 10$ y la corrección −3(−0011:1100 en el código

inverso y 1101 en el complementario), cuando $x + y < 10$. Pongamos por ejemplo la sumación de los números −471 y 607 utilizando el código complementario:

− 471 : 1000	0101	1100	}	codificación,
+ 607 : 1001	0011	1010	}	
10001	1001	0110		primera sumación,
+ 0001	1001	0110		omitimos el traslado del orden izquierdo,
0011	1101	0011		correcciones,
136 − 0100	0110	1001		obtención del resultado después de hacer correcciones.

La codificación por exceso de tres no posee del valor ponderable. La única codificación que tiene todas las cinco propiedades es la *codificación de* Aiken-Emeriax. Sus pesos son 2 4 2 1.

En calidad de ejercicio, demostrar que la codificación de pesos 2 4 2 1 es perfecta:
0 — 0 0 0 0, 1 — 0 0 0 1, 2 — 0 0 1 0, 3 — 0 0 1 1, 4 — 0 1 0 0,
5 — 1 0 1 1, 6 — 1 1 0 0, 7 — 1 1 0 1, 8 — 1 1 1 0, 9 — 1 1 1 1.

Analizando los códigos, notemos que

$$q(x) = \begin{cases} x, & \text{cuando } x < 5, \\ x + 6, & \text{cuando } x \geqslant 5; \end{cases}$$

para determinar las reglas de adicionar las tétradas en este código, es necesario considerar los siguientes casos:

1. $x \leqslant 5$, $y \leqslant 5$, $x + y \leqslant 5$,
   $q(x) + q(y) = x + y$; $q(x + y) = x + y$; $\Delta = 0$.
2. $x < 5$, $y < 5$, $5 \leqslant x + y < 10$,
   $q(x) + q(y) = x + y$; $q(x + y) = x + y + 6$; $\Delta = 6$.
3. $x < 5$, $y \geqslant 5$, $5 \leqslant x + y < 10$,
   $q(x) + q(y) = x + (y + 6)$, $q(x + y) = x + y + 6$; $\Delta = 0$.
4. $x < 5$, $y \geqslant 5$, $10 \leqslant x + y < 15$,
   $q(x) + q(y) = x + (y + 6)$, $q(x + y) + 6$ (traslado, véase (4.10)) $= x + y + 6$, $\Delta = 0$.
5. $x \geqslant 5$, $y \geqslant 5$, $10 \leqslant x + y < 15$,
   $q(x) + q(y) = (x + 6) + (y + 6)$, $q(x + y) + 6 = (x + y) + 6$;
   $\Delta = -6$.
6. $x \geqslant 5$, $y \geqslant 5$, $x + y \geqslant 15$,
   $q(x) + q(y) = (x + 6) + (y + 6)$, $q(x + y) + 6 = (x + y + 6) + 6$;
   $\Delta = 0$.

Por lo tanto, si sumamos $x + y$ en el código de Aiken—Emeriax necesitamos la corrección +6 en las tétradas, donde $x<5$, $y<5$, $5\leqslant x + y<10$ y la corrección −6, donde $x\geqslant 5$, $y\geqslant 5$, $10\leqslant x + y<15$.

En este código sumamos el par ya examinado anteriormente de los números −471 y 607 empleando, además, el código complementario. Tenemos

− 471 : 1011	0010	1111	}	codificación,
+ 607 : 1100	0000	1101	}	
0111	0011	1100		sumación,
0111	0011	1100		omitimos el traslado del orden izquierdo,
1010	0000	0000		correcciones,
+ caso 5	caso 1	caso 8		
136 : 0001	0011	1100.		

Un sistema de numeración que permite hacer cálculos en cada orden independientemente de los resultados obtenidos en otros órdenes es el código en restos. Llámase *conjunto de módulos* de un código en restos un conjunto l de los números naturales mutuamente simples: $q_1, q_2, \ldots, q_l$.

Designemos el resto de la división del número x por q_i mediante $\operatorname{res} \frac{x}{q_i}$. Se denomina *código en restos* de un número x conforme a un conjunto de módulos $q_1, q_2, \ldots, q_l$ una expresión de tipo $\operatorname{res} \frac{x}{q_1} \operatorname{res} \frac{x}{q_2} \ldots \operatorname{res} \frac{x}{q_l}$. Si $\operatorname{res} \frac{x}{q_i} = \alpha$ y $\operatorname{res} \frac{y}{q_i} = \beta$, se tiene $x = nq_i + \alpha$ e $y = mq_i + \beta$. Sumemos estas igualdades. Resulta $x + y = (n + m)q_i + (\alpha + \beta)$. Ahora multipliquemos respectivamente los miembros derechos e izquierdos de las igualdades iniciales $xy = (mnq_i + n\beta + m\alpha)q_i + \alpha\beta$. Si $\alpha + \beta<q_i$ y $\alpha\beta<q_i$, se puede afirmar que, sumando y multiplicando dos números, sus restos de la división por q_i se suman o se multiplican también. Si $\alpha + \beta>q_i$ o $\alpha\beta>q_i$, dividiendo cada una de ellas por q_i y determinando el cociente entero obtenemos que la afirmación sobre la adición y la multiplicación de los restos coincide con la afirmación anterior, si consideramos que después de cumplir estas operaciones se realiza la división por el módulo del orden dado y la selección del resto verdadero. La operación semejante puede tener lugar para cada q_i independientemente, por eso el código en restos permite sumar y multiplicar por órdenes, lo que, a su vez, permite aumentar la velocidad de cumplir las operaciones en los ordenadores.

Por ejemplo, sea que existe el sistema de tres módulos: 7, 8, 9. Entonces, para los números $x = 11$ e $y = 6$, los códigos en restos son 432 y 666, respectivamente. Sumemos y multipliquemos por órdenes los códigos de x e y; entonces obtenemos 10 9 8 y 24 18 12. En cada orden, dividamos el

resultado por el módulo de este orden y saquemos el resto verdadero; obtenemos 318 y 323, respectivamente. La suma y el producto (iguales a 17 y 66) de x e y tienen códigos en restos 318 y 323.

Para obtener la correspondencia biunívoca de los números en el código en restos debemos tener en cuenta que si el producto de todos los módulos q_i utilizados para codificar es igual a N, en el código en restos se puede codificar biunívocamente con estos módulos sólo N números distintos (de 0 a $N-1$, de N a $2N-1$, etc.). El número N se denomina *potencia del sistema de módulos.*

§ 4.4. Etapa algorítmica del diseño

El diseño del operador de autómata consiste en construir una aplicación de autómata según una descripción verbal prefijada que incluye el objetivo del diseño, la destinación del dispositivo automático que se sintetiza y las propiedades de funcionamiento del objeto controlado que junto al dispositivo automático diseñado realiza el objetivo planteado.

Por regla general, la aplicación de autómata se prefija en forma de un grafo de transiciones. El *grafo de transiciones* es un grafo $G = \langle V(X, Y)\rangle$, cada vértice del cual corresponde biunívocamente a un estado interior de dispositivo automático; si éste pasa de un estado S_i al estado S_j, sus vértices respectivos v_i y v_j se unen mediante un arco $(v_i, v_j) \in U$ ponderado por un par de vectores de (X, Y), mediante los cuales se realiza este paso.

En la etapa algorítmica, la información no formalmente prefijada se transforma en un sistema formal como un operador de autómata. Al mismo tiempo se emplea el principio de analogías. Formalmente este paso puede basarse en aplicar las gramáticas, cuyas reglas de sustitución formalizan las propiedades dadas del objeto controlado. Resulta que se engendran las composiciones de los grafos de transiciones que satisfacen la descripción verbal prefijada. Muchas veces esta composición es una jerarquía de dos niveles. El primer nivel comprende los grafos de transiciones, cuya reacción es una acción directa de mando sobre el objeto controlado. El segundo nivel es el grafo de transiciones, cuya reacción corresponde a la exitación de los vértices iniciales de los grafos del primer nivel.

Examinemos la formación de los grafos de transiciones para los dispositivos automáticos que realizan las unidades de la técnica de cálculos y de la automática industrial.

Sea prefijado un dispositivo automático operacional en forma de un dispositivo aritmético de acción sucesiva representado en la fig. 4.8. Este dispositivo contiene cuatro registros *R1*, *R2*, *R3*, *R4* y un sumador de un orden de tipo combinado que se comunican entre sí mediante los canales y las válvulas controlados. En el dispositivo los números de cuatro órdenes se representan en el código binario 8421.

Sinteticemos el dispositivo automático que controla la calculación de la mantisa del cociente. Antes de empezar a cumplir la operación, el dividendo a está en el registro *R1*, el

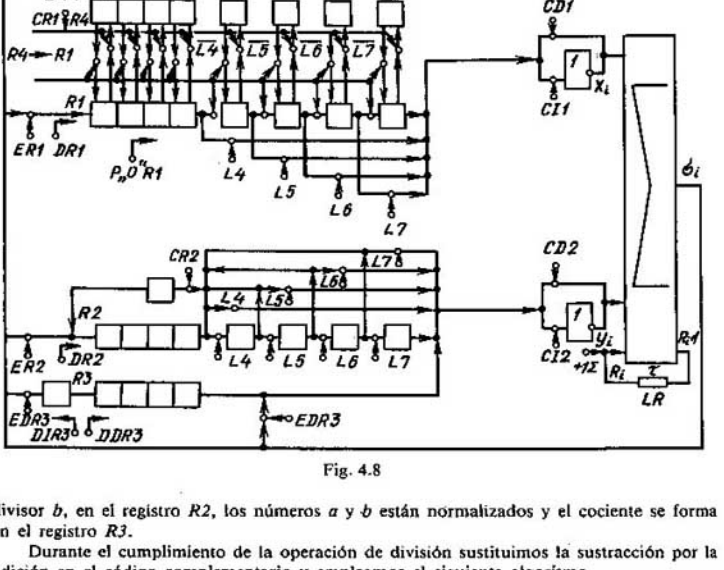


Fig. 4.8

divisor b, en el registro $R2$, los números a y b están normalizados y el cociente se forma en el registro $R3$.

Durante el cumplimiento de la operación de división sustituimos la sustracción por la adición en el código complementario y empleamos el siguiente algoritmo.

1. En el código complementario sustraemos el contenido del registro $R2(b)$ del contenido del registro $R1(a)$, copiando simultáneamente el contenido del registro $R1$ en el registro $R4$.

2. Si $a - b \geqslant 0$ cumplimos el punto 3, en caso contrario, el punto 4.

3. Inscribimos la diferencia $a - b$ en el registro $R1$, ponemos el registro $R4$ en «cero», inscribimos 1 en el registro $R3$, desplazamos el divisor en un orden a la derecha y el registro del resultado a la izquierda, pasamos al punto 5.

4. Inscribimos el contenido del registro $R4$ en el registro $R1$ y 0 en el registro $R3$, desplazamos el divisor en un orden a la derecha y el registro del resultado a la izquierda, pasamos al punto 5.

5. Si el punto 1 se ha cumplido menos que cinco veces, pasamos al punto 1, en caso contrario al punto 6.

6. El fin (en caso general, el control se transmite al bloque de normalización del cociente).

Para simplificar, consideremos que el código del nuto está inscrito de antemano en el registro $R3$.

Si conocemos el dispositivo automático operacional y el algoritmo que se realiza, componemos el diagrama temporal de funcionamiento del dispositivo automático de control que es el algoritmo para cumplir esta operación en términos de puntos de control, *microoperaciones*. A cada microoperación le corresponde un canal de salida del dispositivo automático de mando. De aquí el número de canales de salida del dispositivo automático que se sintetiza es igual al número de todas las microoperaciones.

El conjunto de microoperaciones del dispositivo considerado es el siguiente: *DR1* es el desplazamiento del registro *R1*; *DR2* es el desplazamiento del registro *R2; DDR3* es el desplazamiento derecho del registro *R3; DIR3* es el desplazamiento izquierdo del registro *R3; DR4* es el desplazamiento del registro *R4* (la presencia del registro *R4* permite omitir el restablecimiento del resto); *CD1* es el código directo del contenido del registro *R1; CD2* es el código directo del contenido del registro *R2; CI1* es el código inverso del contenido del registro *R1; CI2* es el código inverso del contenido del registro *R2; ER1* es la entrada del registro *R1; ER2* es la entrada del registro *R2; P«O» R1* es la puesta en «cero» del registro *R1; EIR3* es la entrada del registro *R3* a la izquierda; *EDR3* es la entrada del registro *R3* a la derecha, *CR1* es el ciclo del registro *R1; CR2* es el ciclo del registro *R2*, $+1\ \Sigma$ es la entrega de la unidad en la cadena de traslado del sumador; *L*4 es el funcionamiento con los vectores de longitud 4; *L*5 es el funcionamiento con los vectores de longitud 5; *L*6 es el funcionamiento con los vectores de longitud 6; *L*7 es el funcionamiento con los vectores de longitud 7; *R4→R1* es la transmisión del contenido del registro *R*4 al registro *R1*.

La fila del diagrama temporal corresponde biunívocamente a una microoperación.

El conjunto de microoperaciones que se cumplen simultáneamente se denomina *microinstrucción*, el conjunto de sucesiones de microinstrucciones que corresponde a una operación para cumplir se denomina *microprograma*. Cada microprograma corresponde biunívocamente a un valor del vector de entrada X. Por lo tanto, el número de operaciones que se cumplen, el número de canales de entrada es igual a $[\log_2 | \{x_i\} |]$ donde [ ] es el signo del número entero más próximo.

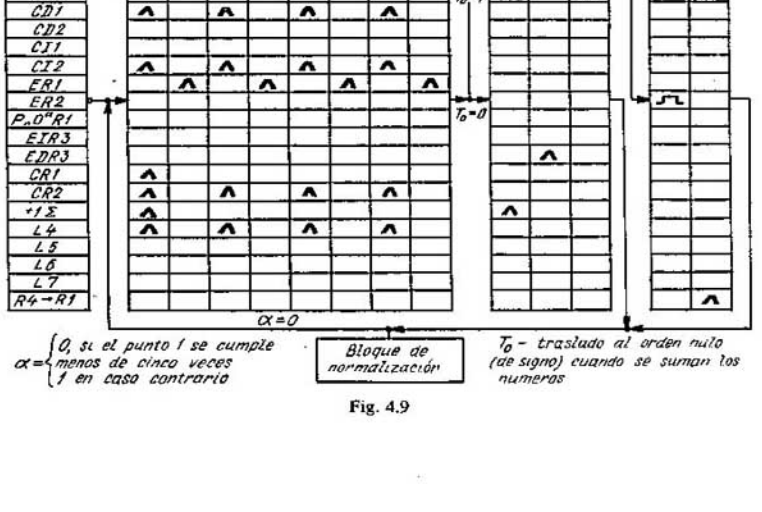


Fig. 4.9

Para sintetizar un dispositivo automático de mando que realice un algoritmo prefijado, se componen con anticipación diagramas temporales detallando cada punto del algoritmo. El diagrama temporal correspondiente a la calculación del orden nulo del cociente en el dispositivo automático operacional (fig. 4.8) según el algoritmo de división mencionado está representado en la fig. 4.9. Los diagramas temporales correspondientes a las calculaciones de los órdenes consecuentes del cociente se diferencian de los diagramas representados en la fig. 4.9 sólo en el primer bloque, a saber: calculando i-ésimo orden del cociente en vez de cumplir la microoperación $L4$ cuatro veces se cumple respectivamente la microoperación $L(4 + i)$ $4 + i$ veces, es decir, calculando el primer orden se cumple la excitación de $L5$ cinco veces, etc. Por consiguiente, para utilizar el primer bloque temporal hace falta «sintonizarlo» antes de calcular el orden correspondiente del cociente.

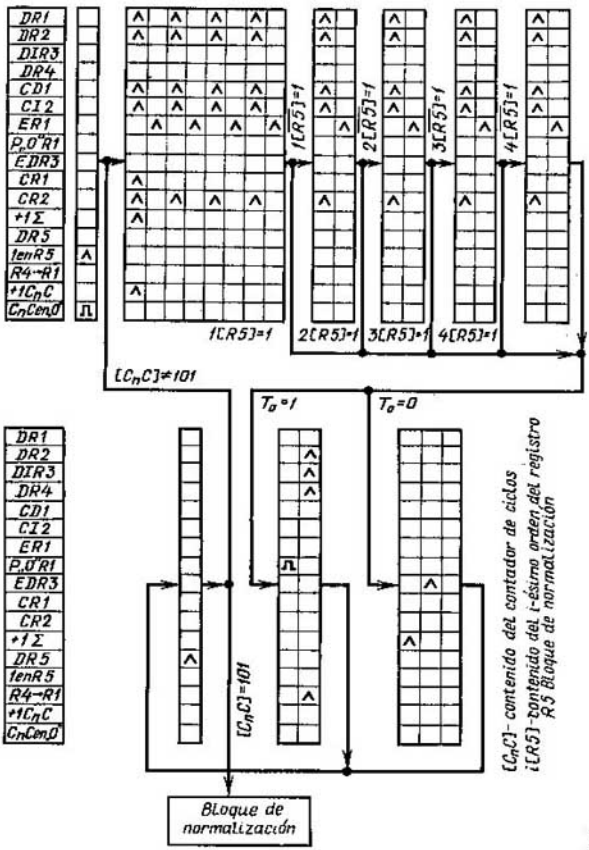


Fig. 4.10

La sintonización del primer bloque temporal consiste en lo siguiente: L_j se examina como un parámetro de entrada de este bloque y antes de calcular el orden nulo se adjudica a j el valor de 4 y después de calcular todo orden del cociente el valor de j se aumenta en 1. Sintonicemos el primer bloque temporal introduciendo un registro complementario de cuatro órdenes $R5$, antes de empezar a cumplir la operación de división se inscribe 1 en este registro y al cabo de calcular cada orden del cociente el registro $R5$ se desplaza en un orden. La salida del i-ésimo orden del registro $R5$ se transmite a la válvula $L(|\bar{i}| \pm 3)$.

Para hallar el número de órdenes calculados del cociente, introduzcamos un contador de tres órdenes (C_nC), cuyo estado 101 indica que cinco órdenes del cociente están calculados y hace falta transmitir el mando al bloque de normalización.

Basándose en el análisis realizado, es conveniente cambiar el conjunto de microoperaciones, a saber: en vez de las microoperaciones $L4$, $L5$, $L6$ y $L7$ introducir las microoperaciones $DR5$ (desplazamiento del registro $R5$) y 1 en $R5$ (inscripción de la unidad en el registro $R5$) y, también, introducir complementariamente las microoperaciones $+1$ C_nC (adición de la unidad al contador de ciclos C_nC) y C_nC en «O» (puesta del contador de ciclos en «O»).

De las transformaciones consideradas resulta que el diagrama dado en la fig. 4.9 se transforma en el diagrama temporal representado en la fig. 4.10.

El diagrama temporal no da la aplicación de autómata. En efecto, a un valor del vector de entrada que determina la operación para cumplir le corresponde varios valores del vector de salida (de las microinstrucciones), es decir, el diagrama temporal prefija una transformación no unívoca del vector de entrada en el de salida. Por consiguiente, esta transformación no es aplicación de autómata. Para obtenerla es necesario introducir la memoria en el dispositivo automático que se sintetiza. Con ello, el

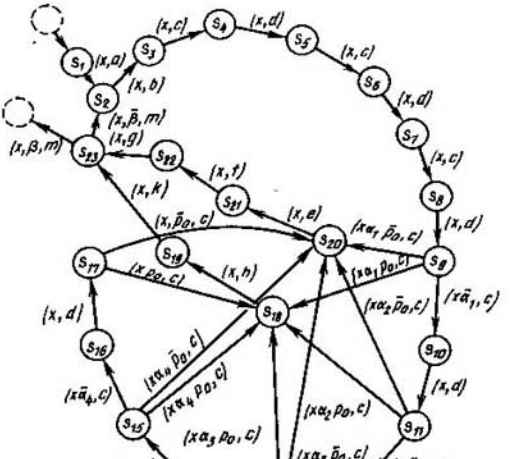


Fig. 4.11

volumen de la memoria, igual al número de todas las microinstrucciones, es premiditadamente suficiente. El conjunto del vector de entrada y del estado de la memoria determina unívocamente la microinstrucción.

En correspondencia con el diagrama temporal construyamos el grafo de transiciones del dispositivo automático. Su estado interior se pone en correspondencia biunívoca a una columna del diagrama temporal.

El grafo de las transiciones del dispositivo automático que realiza el diagrama temporal (fig. 4.10) se representa en la fig. 4.11. En esta figura, las microinstrucciones se denotan por letras latinas y tienen siguiente forma:

a = {1 en $R5$, C_nC en «O»};
b = {$DR1$, $DR2$, $CD1$, $CI2$, $CR1$, $CR2$, $+1\Sigma$; $+1C_nC$};
c = {$ER1$}; d = {$DR1$, $DR2$, $CD1$, $CI2$, $CR2$};
e = {$+1\Sigma$}; f = {$EDR3$}; g = {$DR2$, $DIR3$, $DR4$};
h = {P«O» en $R1$}; k = {$DR2$, $DIR3$, $DR4$, $R4 \to R1$}; m = {$DR5$}.

Consideremos que si la unidad (x = 1) llega a la entrada del dispositivo automático de mando, éste controla la división.

Las variables lógicas (etiquetas) que determinan el mando las designaremos mediante α_i, contenido del i-ésimo orden del registro $R5$; β es el estado convencional del contador C_nC;

$$\beta = \begin{cases} 1, \text{ si el estado del contador es 101,} \\ 0 \text{ en caso contrario;} \end{cases}$$

T_0 es el traslado al orden nulo cuando se suman los números.

Examinemos un sistema grande de la automática industrial, sistema para quemar el combustible sólido en una capa densa. El sistema comprende cuatro hogares semigasógenos, instalaciones de alimentación de combustible y de aire, así como la instalación de desescoriado. En la fig. 4.12 se representa el esquema del hogar semigasógeno, donde *1* es el transportador; *2* es el arado; *3* es la tolva de entrada; *4* es el combustible; *5* es el alimentador; *6* es el cargador; *7* es el semigas; *8* es la alimentación de aire; *9* es la cámara de trabajo, *10* es la escoria; *11* es la capa del combustible recién cargado; *12* es la zona de reducción; *13* es la zona de combustión; *14* es la zona de escoria; *15* es el emparillado.

Los hogares semigasógenos son un tipo de los hornos industriales y forman parte del servicio de gas de una fábrica. La automatización del mando de los procesos de combustión en los hogares es una de las tareas de automatización de todo el proceso tecnológico. La completitud de gasificación la determina el porcentaje de bióxido carbónico en el semigas. Si el porcentaje aumenta, el calor de combustión del semigas disminuye y la temperatura del hogar aumenta. Antes de salir del hogar, el semigas se mezcla con el aire secundario y se suministra a la cámara de trabajo. El hogar se alimenta con combustible por medio de un sistema compuesto de un transportador, un lanzador de tipo arado, una tolva de entrada, un alimentador y un cargador. La escoria se quita empleando sacudidoras, una válvula de arranque y vagones. El aire destinado para quemar el combustible se suministra utilizando la válvula de alimentación del aire primario.

El mando del proceso de gasificación se realiza manteniendo un espesor determinado de la capa del combustible que se quema (de 200 a 400 mm para antracita, de 400 a 800 mm para hulla y lingito), es decir, se determina por la intensidad de alimentación de combustible, del aire primario y de extracción de escoria de la zona de combustión.

El sistema de mando de combustión tiene los siguientes canales (fig. 4.13) que son microoperaciones en el diseño del dispositivo automático de mando: *K1* es el arranque y la parada del proceso de gasificación; *K2* es la indicación del funcionamiento del proceso de gasifica-

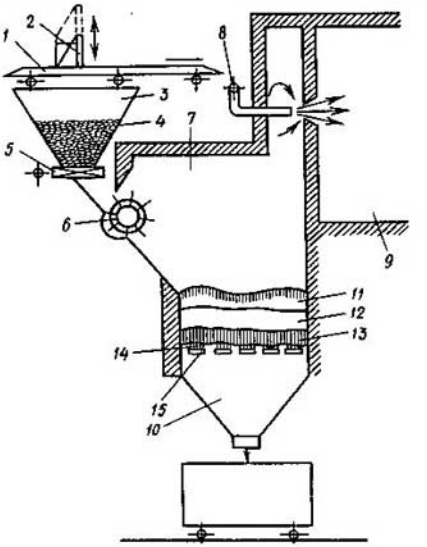


Fig. 4.12

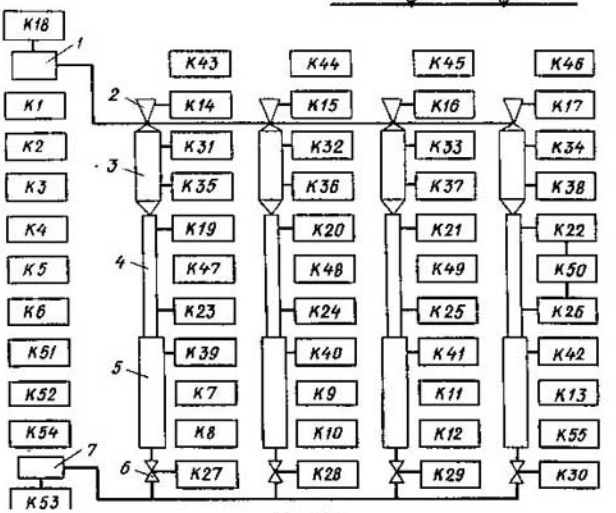


Fig. 4.13

ción; *K3* es el arranque y la parada de llenado de las tolvas de entrada; *K4* es la indicación de llenado de las tolvas de entrada; *K5* es el arranque y la parada de alimentación de los hogares con combustible; *K6* es la indicación de alimentación de los hogares con combustible; *K7* es la detención de gasificación en el primer hogar; *K8* es la indicación del estado del canal *K7*; *K9* es la detención de gasificación en el segund tolva; *K10* es la indicación del estado del canal *K9*; *K11* es la detención de gasificación en la tercera hogar; *K12* es la indicación del estado del canal *K11*; *K13* es la detención de gasificación en el cuarto hogar; *K55* es la indicación del estado del canal *K13*; *K14* es el arado del primer hogar; *K15* es el arado de la segunda tolva; *K16* es el arado de la tercera tolva; *K17* es el arado de la cuarta tolva; *K18* es el transportador; *K19...K22* son los alimentadores de la primera, ..., la cuarta tolva, respectivamente; *K23...K26* son los cargadores; *K27...K30* son las válvulas de alimentación con aire secundario; *K31...K34* son los captadores del nivel superior en las tolvas de entrada; *K39...K42* son los captadores de alimentación con combustible; *K43...K46* es la indicación de avería de la instalación para llenar las tolvas de entrada; *K47...K50* es la indicación de avería de la instalación para alimentar hornos con combustible; *K51* y *K52* es el arranque y la parada del proceso de control, respectivamente; *K53* es la indicación de control; *K54* son las instalaciones iniciales de los elementos ejecutivos.

En la fig. 4.13: *1* es el transportador; *2* es el arado; *3* es la tolva de entrada; *4* es el sistema de alimentación de combustible; *5* es el hogar; *6* es la válvula de alimentación de aire; *7* es la válvula común.

El conjunto enumerado de canales se incluye en el portador de un modelo Ψ_a que formaliza el funcionamiento del objeto controlado. Además de este conjunto, el portador del modelo Ψ_a puede incluir un conjunto de elementos complementarios que son identificadores de los canales interiores, de entrada y salida introducidos para lograr el control eficaz de autómata. Partiendo de esta información obtenida del tecnólogo en el portador se establecen relaciones de cuasa-efecto tipo $A \rightarrow B$ que determinan la signatura del modelo Ψ_a. Es obvio, que este modelo es simétrico y puede representarse en forma del mografo $G^M(\Psi_a)$. Se puede también expresar las relaciones de causa-efecto en forma de diagramas temporales. El paso del mografo o diagramas temporales al grafo de transiciones es análogo al paso de diagramas temporales (que pueden representarse en forma del mografo) al grafo de transiciones de un dispositivo de control de microprograma.

Así, pues, en esta etapa de diseño de los dispositivos automáticos se realiza el paso de la aplicación $A \rightarrow B$ a una aplicación de autómata $XS^+ \rightarrow S^- Y$, donde X es el vector de entrada, Y es el vector de salida, o reacción del dispositivo automático, S^+ es el identificador del estado interior, en el cual pasa el dispositivo automático en el momento examinado, S^- es el identificador del estado interior, al cual el dispositivo automático pasa del estado S^+ bajo la influencia del vector de entrada X.

§ 4.5. Diseño abstracto del dispositivo automático

La capacidad de memoria $\{S_i\}$ de un dispositivo automático introducida en la etapa de diseño algorítmica puede ser excesiva, lo que se puede eliminar encolando estados equivalentes. La transformación dada se refiere a la etapa de diseño abstracto.

Los estados se denominan *equivalentes* cuando el dispositivo automático, encontrándose en éstas, elabora una misma sucesión de salida para cualquier sucesión de entrada.

De esta definición se desprende que si, encolando los vértices correspondientes, se sustituye cada clase de estados equivalentes por un estado, el grafo obtenido de transiciones representará la misma aplicación $X \rightarrow Y$ que el grafo inicial.

Huffman propuso el método de *minimización abstracta del dispositivo automático* basado en el encolamiento de estados equivalentes. Este método consiste en formación sucesiva de clases de estados equivalentes con ayuda de tablas de salidas y de transiciones. Examinemos el método de Huffman en un ejemplo.

Ejemplo 4.1. Sea que después de realizar la etapa algorítmica de síntesis se ha obtenido el grafo de transiciones representado en la fig. 4.14, *a*.

Construimos la *tabla de salidas* que es una tabla bidimensional (tabla 4.3), a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente un valor del vector de entrada X; a cada columna, un estado interior del dispositivo automático, y en la intersección de i-ésima fila con j-ésima columna se halla un valor del vector de salida Y que se elabora a la salida cuando el dispositivo automático está en el j-ésimo estado interior y a la entrada se da el i-ésimo vector.

Tabla 4.3

X_i	S_j						
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1

Si, en la tabla de salida, a dos estados interiores del dispositivo automático les corresponden distintos valores de las columnas, los estados no son equivalentes, puesto que en ellos las aplicaciones $X \rightarrow Y$ son distintas. De antemano partamos todo el conjunto de estados en las clases de *estados convencionalmente equivalentes*, a saber: en una misma clase se incluyen los estados, a los cuales les corresponden los valores iguales de las columnas en la tabla de salidas: $K_1 = \{S_1, S_2, S_5\}$; $K_2 = \{S_3, S_4, S_6, S_7\}$.

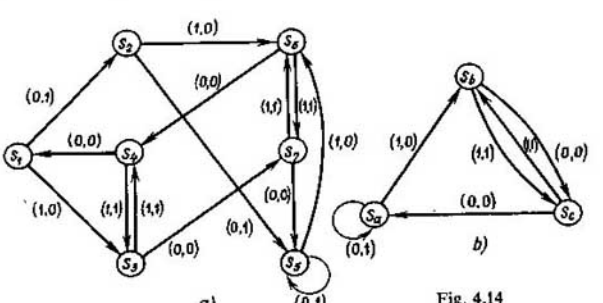


Fig. 4.14

Si la tabla de salidas se examina como una matriz de incidencia de un modelo, los estados interiores se hallan en una misma clase cuando en su respectiva matriz de frecuencia de las relaciones las frecuencias propias y mutuas de los estados interiores son iguales una a otra:

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_a, S_b) = \frac{f_{aa} - 2f_{ab} + f_{bb}}{f_{ab}} = 0.$$

Para que los estados interiores del dispositivo automático sean equivalentes es insuficiente tener una misma correspondencia $X \to Y$ solamente en estos estados; es necesario que para cualquier otra transición posible de estos estados la aplicación $X \to Y$ sea la misma.

Para verificar este dato construimos la *tabla de transiciones* (tabla 4.4). En esta tabla, a cada fila y columna les corresponden los mismos valores que en la tabla de salidas y en la intersección de i-ésima fila con j-ésima columna se encuentra una clase de estados convencionalmente equivalentes, bajo la influencia X_i el dispositivo automático pasa del estado S_j a esta clase.

Tabla 4.4

X_i	S_j						
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
0	K_1	K_1	K_2	K_1	K_1	K_2	K_1
1	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2

Si la clase de estados convencionalmente equivalentes escogida en el paso anterior no es clase de estados equivalentes, a sus estados les corresponden valores distintos de las columnas; esto significa que, para las siguientes transiciones, las aplicaciones $X \to Y$ son diferentes para los estados dados.

Cada clase K_i se parte en nuevas clases de estados convencionalmente equivalentes con la particularidad de que una misma clase comprenda todos los estados de la clase K_i con los números iguales de columnas: $K_1 = \{S_1, S_2, S_5\}$, $K_1' = \{S_3, S_6\}$, $K_1'' = \{S_4, S_7\}$.

Componemos la matriz de frecuencia de las relaciones según esta tabla de transiciones determinando, al mismo tiempo, la multiplicación como $K_i \times K_i = 1$, $K_i \times K_j = 0$ $(i \neq j)$. Entonces cuando se parten las clases obtenidas en el paso anterior los estados interiores se encuentran en una misma clase, si las frecuencias propias y mutuas de estos estados son iguales una a otra, o sea,

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_a, S_b) = 0.$$

Al formar las clases K_1, K_1', K_1'' volvemos a construir la tabla de transiciones, etc. hasta que cada clase de estados convencionalmente equivalentes formada en el paso anterior sea constante.

Construyamos la tabla de transiciones (tabla 4.5) teniendo en cuenta la partición de la clase K_2

Tabla 4.5

X_i	S_j						
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
0	K_1	K_1	K_2''	K_1	K_1	K_2''	K_1
1	K_2'	K_2'	K_2''	K_2'	K_2'	K_2''	K_2'

Del análisis de esta tabla deducimos que todos los estados de cada una de las clases formadas «se portan como amigos»: bajo la influencia de X pasan a la misma clase que en la salida permite obtener un mismo valor de Y para todos los estados de la clase al realizar una transición. Por consiguiente, todos los estados de una clase se portan como un estado que los sustituye.

Sustituyamos las clases K_1, K_2', K_2'' por los estados interiores S_a, S_b, S_c, respectivamente. Como resultado obtenemos el grafo minimizado de transiciones (fig. 4.14, *b*) que prefija la misma aplicación $X \to Y$ que el grafo inicial de transiciones (fig. 4.14, *a*). Para ilustrarlo realicemos tres experimentos.

Sea dada la sucesión temporal en forma $X(t) = 011010$ a la entrada del dispositivo automático. En los casos primero y segundo el dispositivo automático está prefijado por el grafo inicial de transiciones (fig. 4.14, *a*) respectivamente a los estados iniciales S_1 y S_2. En el tercer caso el dispositivo automático está prefijado por el grafo minimizado (fig. 4.14, *b*) con el estado inicial S_a. Determinemos sucesiones temporales de salida $Y(t)$ para cada caso.

Reduzcamos los resultados de todos los tres experimentos en la tabla (tabla 4.6).

Tabla 4.6

t		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
$X(t)$		0	1	1	0	1	0
$S_n = S_1$	$S(t+1)$	S_2	S_6	S_7	S_5	S_6	S_4
	$Y(t)$	1	0	1	0	0	0
$S_n = S_2$	$S(t+1)$	S_5	S_6	S_7	S_5	S_6	S_4
	$Y(t)$	1	0	1	0	0	0
$S_n = S_a$	$S(t+1)$	S_a	S_b	S_c	S_a	S_b	S_c
	$Y(t)$	1	0	1	0	0	0

Si las dimensiones de la tabla de salidas y transiciones son grandes para la minimización necesaria del grafo de transiciones por medio del ordenador, es conveniente emplear matrices de frecuencia de las relaciones correspondientes a estas tablas, lo que simplifica los cálculos. Con ello, se minimizan los grafos de transiciones basándose en la afirmación siguiente.

Los estados interiores S_a y S_b son equivalentes si, y sólo si, las derivadas $\frac{\partial G}{\partial S}(S_a, S_b)$ de los grafos modelos, correspondientes a las tablas de salidas

y transiciones, son iguales a cero

$$\frac{\partial G}{\partial S}(S_a, S_b) = \frac{2f_{aa} - 2f_{ab} + f_{bb}}{f_{ab}} = 0$$

en todo paso de la partición del conjunto de estados interiores en clases.

La minimización de la capacidad de la memoria, por ejemplo, cuatro veces, ahorra sólo dos elementos de la memoria. Un medio más actual y potente para optimizar toda la estructura del dispositivo automático es la *descomposición abstracta de los dispositivos automáticos,* especialmente descomposición paralela de los dispositivos automáticos. Por una parte, la necesidad de buscarla se debe a las exigencias modernas que deben satisfacer la acción rápida del control (que condiciona el uso del control paralelo de objeto). Por otra parte, el aumento de la fiabilidad del control automático exige la partición del dispositivo automático en una serie de los dispositivos automáticos de dimensiones menores que no son ligados entre sí funcionalmente y garantizan la realización del operador obtenido de autómata.

La búsqueda de la descomposición paralela de los dispositivos automáticos abstractos se reduce a la *descomposición* del grafo de transiciones en el *producto cartesiano parcial* de los grafos más simples conforme al número de vértices. Descomponer el grafo G en el producto cartesiano parcial significa hallar los grafos G_i, $i = 1, \ldots, n$, tales que $G \subset G_1 \times G_2 \times \times \ldots \times G_n$.

Para una clase de los dispositivos automáticos de *mando de microprogramas,* importante en la técnica de cálculos, se puede resolver el problema de construir la descomposición paralela utilizando las propiedades típicas de los dispositivos automáticos de esta clase.

Al examinar los dispositivos automáticos de *microprogramas* referiremos a los elementos de los cuales se toma la información que caracteriza la marcha de cálculos a las cadenas de reacción incluidas en el bloque de memoria del dispositivo automático. Los dispositivos automáticos de microprogramas poseen una propiedad específica: el vector de entrada X no cambia desde el comienzo hasta el fin del funcionamiento del dispositivo automático hasta que se cumpla la operación prefijada. Empleando esta propiedad detallemos el concepto del dispositivo automático de microprogramas.

Introduzcamos con anticipación algunos conceptos. Se denomina *zung* G_z un grafo ponderado en el que existe al menos un vértice, a través del cual pasan todos los circuitos del grafo, y no existe ningún camino que no sea parte de tal circuito.

Un grafo se denomina *reducible al zung,* si transforma en el zung cuando se introducen en él no más de un vértice y sus arcos incidentes.

Un dispositivo automático se denomina *de microprogramas,* si su grafo de transiciones se reduce al zung con el vértice inicial que corresponde al

comienzo y al fin del funcionamiento del dispositivo automático para cualquier vector de entrada X que determina la operación realizada y no varia en estados intermedios. En caso general el dispositivo automático de microprogramas realiza varias operaciones a cada una de las cuales le corresponde un microprograma. Durante la construcción del grafo de transiciones que realiza estos microprogramas encolaremos los estados compatibles.

Estados interiores S_i y S_j se denominan *compatibles* $S_i \equiv S_j$, si cualquier vector de entrada que llega al dispositivo autómatico en estado S_i no coincide y no integra ningún vector de entrada que llega al dispositivo automático en estado S_j: $X_{S_i} \not\subset X_{S_j}$.

Un subgrafo $G' = \langle V', U' \rangle$ de un grafo $G = \langle V, U \rangle$ se llama *bincidente*, si a toda su vértice le son incidentes dos, y sólo dos, grupos de arcos paralelos que entran y salen, tal vez excepto un elemento minimal $v^+ \in V'$ y un elemento maximal $v^- \in V'$ del conjunto V' con la particularidad de que en el vertice v^+ pueden entrar y del vértice v^- pueden salir varios

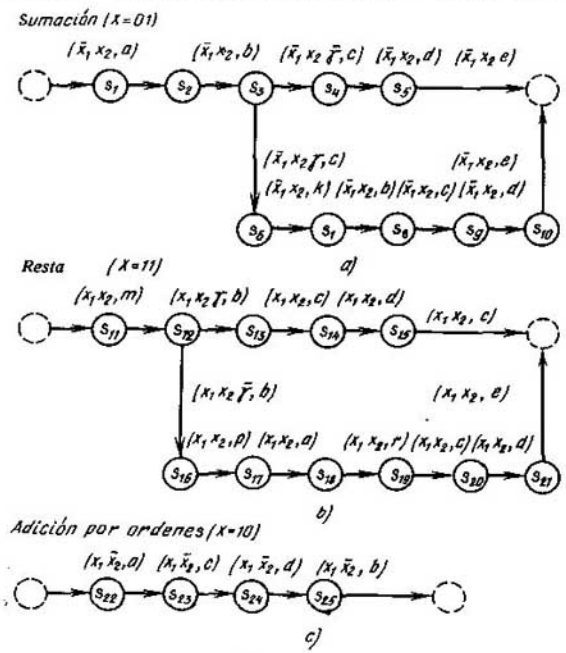


Fig. 4.15

arcos no paralelos. Las sucesiones de microinstrucciones que ponderan el subgrafo bincidente se denominan *microrrayo* y el número de microinstrucciones que integran la sucesión se llama su *longitud.*

Al sintetizar el dispositivo automático de mando que realiza varios microprogramas encolamos estados interiores compatibles teniendo en cuenta dos restricciones. En primer lugar, debemos encolar empezando por los estados finales correspondientes a operaciones distintas. En segundo lugar, encolamos los estados compatibles que se elaboran en la salida del dispositivo automático mediante una misma microinstrucción.

Examinemos el dispositivo automático de microprogramas para controlar el procesor del ordenador que cumple las operaciones «Sumación» $(a + b)$, «Sustracción» $(a - b)$ y «Adición por órdenes». En la fig. 4.15 se representan los grafos de transiciones construidos por diagramas temporales. En este dibujo las microinstrucciones se designan por letras latinas: $a = \{BD\}$; $b = \{CR\}$; $c = \{S\Sigma\}$; $d = \{C_nB,\ BC,\ B \to C\}$; $e = \{CC,\ R\}$; $k = \{BD,\ C_nB,\ BA,\ +1730D\}$; $m = \{CA,\ BD\}$; $p = \{CA,\ CB\}$; $r = \{CR,\ C_nB\}$.

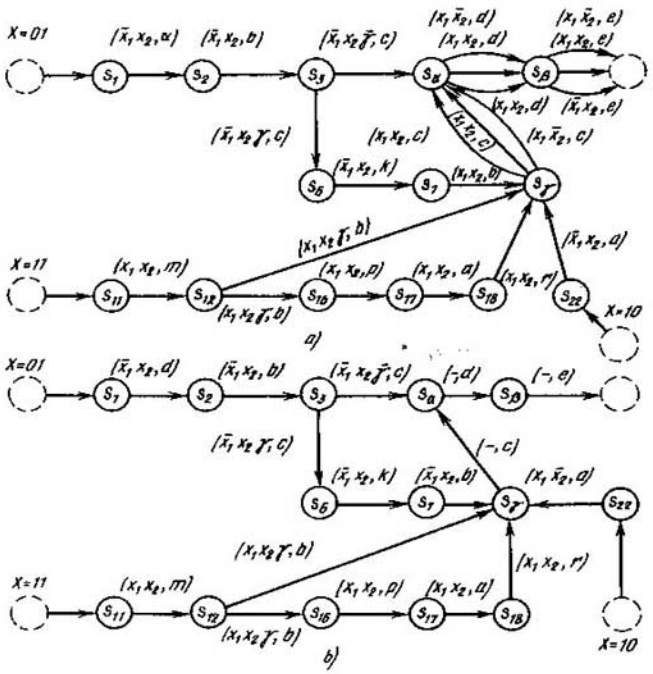


Fig. 4.16

Las microoperaciones, que son los elementos de microinstrucciones, se descifran del modo siguiente: *CA* es el complemento del registro *A*; *BD* es el borrado del registro *D*; *CR* es el comienzo del recorrido; *CB* es el complemento del registro *B*; C_nB es el cálculo del registro *B*; *SΣ* es la salida de la suma Σ; *BA* es el borrado del registro *A*; *+1730D* es «+1» en el trigger 30 del registro *D*; *BC* es el borrado del registro *C*; $B \rightarrow C$ es la transmisión del registro *B* al registro *C*; C_nB es el cálculo del registro *C*; *R* es la respuesta sobre el cumplimiento de la operación.

El resultado de los cálculos que se realizan se caracteriza por una variable lógica *TOD*, valor del trigger de cero del registro *D* (en la fig. 4.15 y, a continuación, *TOD* se denota por γ).

Encolemos los estados compatibles. Como resultado obtenemos el grafo unido de transiciones *G* (fig. 4.16, *a*). Sobre este grafo en los estados S_γ, S_u y S_β completamos la definición de la aplicación $X \rightarrow Y$ añadiendo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, c)$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, d)$ y $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, e)$, respectivamente, (fig. 4.16, *b*). Después de haber encolado los estados compatibles contraigamos los subgrafos bincidentes. Como *contracción* de subgrafos bincidentes se comprende la sustitución de este subgrafo por un vértice, al cual pondera el microrrayo correspondiente. Los microrrayos tienen siguiente forma: *A = abc; B = de; D = kb, E = mb; M = par.*

Como resultado de la contracción de los subgrafos bincidentes obtenemos el grafo del dispositivo automático de mando (fig. 4.17, *a*) con la determinación interrumpida: varias microinstrucciones corresponden a un estado que, a su vez, corresponde al vértice, al cual está contraído el subgrafo bincidente.

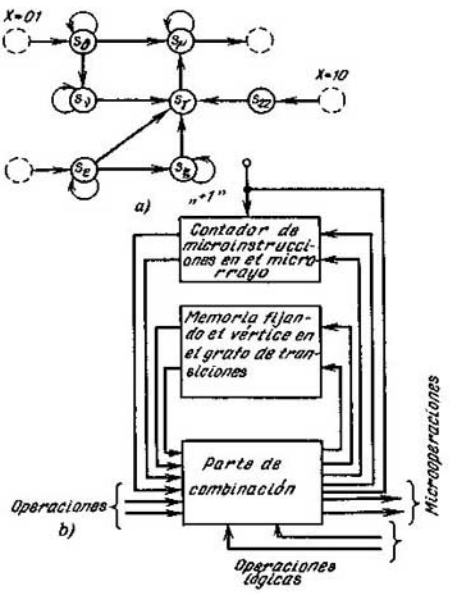


Fig. 4.17

El grafo inicial de transiciones (fig. 4.16, *b*) se obtiene como el producto cartesiano parcial del grafo G (fig. 4.17, *a*) y un grafo bincidente, cuyos fin y origen se unen por un arco y el número de vértices es igual a la longitud maximal de microrrayos considerados (en este caso a tres). El grafo bincidente, cuyos fin y origen se unen por un arco se realiza como un contador.

De tal modo conservamos el carácter determinado del dispositivo automático y la equivalencia de su funcionamiento utilizando en la realimentación del dispositivo automático el contador de microinstrucciones en el microrrayo que aumenta su valor hasta el número igual a la longitud maximal del microrrayo $l_{máx}$ (fig. 4.17, *b*).

Pasando al vértice v_{G_i} que corresponde a un subgrafo bincidente contraído G_i, en el contador se pone el número igual a $l_{máx} - l_i$, donde l_i es la longitud del microrrayo que pondera este subgrafo. Con ello, los l_i estados del contador se ponen en correspondencia biunívoca a las microinstrucciones correspondientes al vértice v_{G_i}. Después de cada transición en el subgrafo bincidente se suma 1 al contenido del contador. Por lo tanto, el conjunto del código del vértice v_{G_i} y el contenido del contador determina biunívocamente la microinstrucción en ejecución. El relleno en exceso del contador indica que el dispositivo automático ha salido del estado correspondiente al vértice v_{G_i}.

Las transiciones organizadas de tal modo permiten no excitar las salidas de la parte de combinación del dispositivo automático que van a la realimentación cuando se cumple el microrrayo, puesto que el estado que memoriza el vértice v_{G_i} no cambia y el contador pasa automáticamente de un estado a otro al adicionar 1 o con ayuda de la microoperación $+1C_{n\mu}$ (al contador de microinstrucciones se suma la unidad) que amplía el conjunto de microoperaciones. Durante la utilización del último procedimiento se excita sólo una salida orientada a la reacción.

Realicemos transformaciones sucesivas del grafo de transiciones concentrando estados no encadenados. Dos estados interiores (dos vértices) del grafo de transiciones se denominan *no encadenados*, si no integran ningún camino simple del grafo de transiciones cuando funciona el dispositivo automático sintetizado.

Para realizar la transformación propuesta del grafo de transiciones construyamos el grafo G_3 del modo siguiente. A cada vértice del grafo de transiciones le pongamos en correspondencia biunívoca un vértice del grafo G_3; un par de vértices v_a, $v_b (v_a \neq v_b)$ del grafo G_3 es adyacente, si en el grafo de transiciones existe un camino simple que pasa por los vértices correspondientes a v_a y v_b cuando funciona el dispositivo automático sintetizado. Denominaremos *grafo de encadenamiento* el grafo G_3 construido de tal modo.

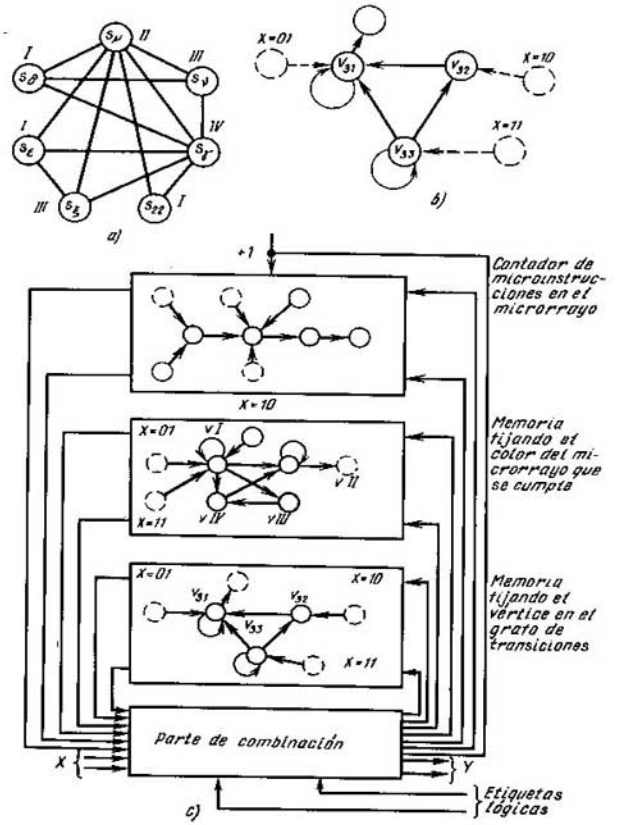


Fig. 4.18

Empleando la operación de colorar los vértices del grafo partamos todo el conjunto de vértices del grafo de encadenamiento en subconjuntos, cada uno de los cuales comprende vértices correspondientes a los estados interiores no encadenados del dispositivo automático que sintetizamos.

En la fig. 4.18, *a* se dan el grafo de encadenamiento y su coloración para el dispositivo automático representado en la fig. 4.17, *a*. Al colorar el grafo de encadenamiento tenemos los subconjuntos siguientes de estados,

cada uno de los cuales consta de los estados no encadenados entre sí:

$$V_{\text{I}} = \{S_\delta, S_{22}, S_\varepsilon\},\ V_{\text{II}} = \{S_\omega, S_\xi\},\ V_{\text{III}} = \{S_\mu\},\ V_{\text{IV}} = \{S_\gamma\}.$$

De cada subconjunto $V_i (i = \text{I}, \ldots, \text{IV})$ tomamos por un elemento, por ejemplo, S_δ, S_μ, S_γ, S_ν, de éstos formemos el subconjunto $V_{31} = \{S_\delta, S_\mu, S_\nu, S_\gamma\}$. Luego de cada subconjunto V_i volvemos a tomar por un elemento entre los que se quedan y a formar un subconjunto de éstos. Elegimos hasta que cada uno de los subconjuntos V_i se transforme en un conjunto vacío. Los subconjuntos formados como resultado constan de estados encadenados. En este caso tienen siguiente forma:

$$V_{31} = \{S_\delta, S_\mu, S_\nu, S_\gamma\},\ V_{32} = \{S_{22}, S_\xi\},\ V_{33} = \{S_\varepsilon\}.$$

Cada subconjunto compuesto de estados encadenados se sustituye por un estado, cuyo peso es un conjunto de microrrayos correspondientes a los vértices que se unen (en caso particular el microrrayo puede comprender una microinstrucción). Esta sustitución se denominará *concentración de estados encadenados*. Después de concentrar los estados encadenados del grafo de transiciones (fig. 4.17, *a*) obtenemos el grafo de transiciones G_n (fig. 4.18, *b*).

Las concentraciones de estados encadenados interrumpen también la determinación del dispositivo automático. Conservamos la determinación y la equivalencia del dispositivo automático que se sintetiza utilizando en la realimentación un elemento de memoria que fije el color correspondiente al microrrayo que se cumple en el momento dado (fig. 4.18, *c*). Entonces el código del vértice en el grafo final de transiciones, el color y el contenido del contador de microinstrucciones del microrrayo en su conjunto determinan biunívocamente la microinstrucción que se cumple. Después de esta transformación, el grafo de transiciones puede representarse como el producto cartesiano parcial de los grafos correspondientes (fig. 4.18, *c*), lo que simplifica el proceso de la codificación de estados interiores y disminuye de hecho los gastos para aparatos cuando se sintetiza el esquema de excitación de canales a reacción inversos del dispositivo automático.

Si en el grafo de transiciones correspondiente a los microprogramas que se realizan no hay circuitos, es conveniente descomponerlo sólo en dos grafos excluyendo el grafo que indica el cambio de colores. Al mismo tiempo, se realiza la contracción de los subgrafos bincidentes en cada grafo de transiciones correspondiente a la operación que se realiza y, después, se encolan los estados compatibles.

Si el grafo de transiciones es un árbol, en la realimentación del dispositivo automático se queda solamente el contador. Además, el contador realiza el grafo de transiciones, si se memorizan o presentan valores de las variables lógicas que caracterizan los cálculos. Al estado interior inicial del dispositivo automático se le pone en correspondencia un código inicial en el contador, por ejemplo, el código 0. Los estados interiores, a los que el dispositivo automático pasa del estado S_i con el código A, se codifican como $A + 1$.

Los códigos cambian por medio de adicionar la unidad al contador a cada transición. Entonces, si existe la ramificación, ciertos estados interiores tendrán códigos iguales. Además, la determinación del dispositivo automático no se interrumpe debido al almacenamiento de los índices lógicos que caracterizan los cálculos. Las indicaciones del contador y los valores de las variables lógicas determinan unívocamente la microinstrucción necesaria. Esta afirmación es válida, ya que el grafo de transiciones es un árbol, o sea, no contiene ciclos. Al finalizar las operaciones se realiza la extinción de contadores.

Representando el grafo de transiciones correspondiente al dispositivo automático de mando de una operación en forma del producto cartesiano parcial, realizamos las siguientes transformaciones:

1) encolamiento de estados pseudoequivalentes;

2) contracción de los subgrafos bincidentes, además como resultado de cambiar la sucesión de aplicación de estas transformaciones, surgen algunas variantes equivalentes.

Examinemos el grafo de transiciones para controlar la operación de división (véase la fig. 4.12). Concentrando los subgrafos bincidentes, obtenemos el grafo de transiciones G (fig. 4.19, *a*). A los vértices de este grafo les corresponden los siguientes microrrayos: $S_1 - a$; $S_a - bcdcdcdc$; $S_b - dc$; $S_d - dc$; $S_e - dc$; $S_f - hk$; $S_g - efg$; $S_{23} - m$. Por consiguiente, para restablecer el funcionamiento equivalente hace falta tener el contador de ocho estados.

Se puede encolar los vértices correspondientes a los estados S_f y S_g del grafo de transiciones al haber memorizado el indicio p_0; la determinación del dispositivo automático con

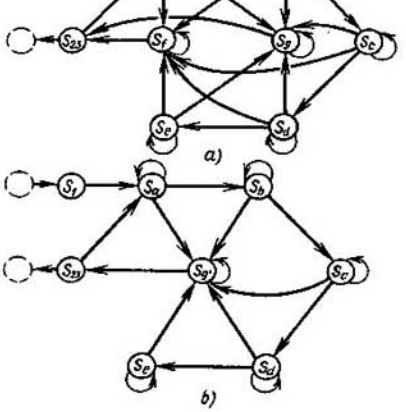


Fig. 4.19

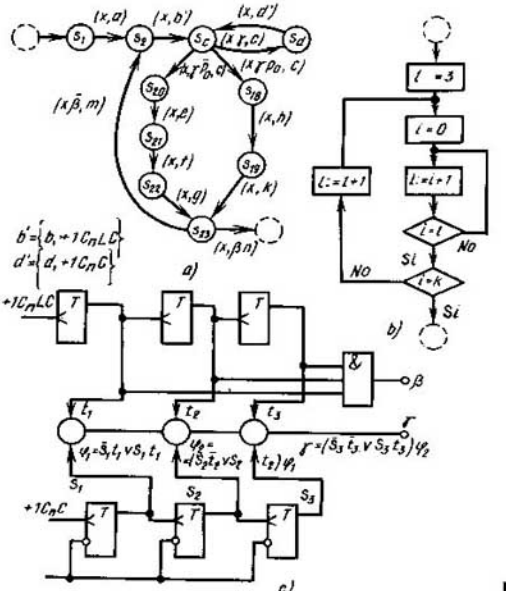


Fig. 4.20

ello, no se interrumpe. En definitiva, tenemos el grafo de transiciones G, representado en la fig. 4.19, *b*. Los estados del contador, el índicio p_0 y el código del vértice del grafo de transiciones (fig. 4.19, *b*) determinan unívocamente la microinstrucción que se cumple.

Los estados interiores se denominan *pseudoequivalentes,* si una misma microinstrucción se realiza en ellos. Para el grafo de transiciones G_t (véase la fig. 4.11) tenemos los siguientes conjuntos de estados pseudoequivalentes: $M_c = \{S_3, S_5, S_7, S_9, S_{11}, S_{13}, S_{15}, S_{17}\}$; $M_d = \{S_4, S_6, S_8, S_{10}, S_{12}, S_{14}, S_{16}\}$.

Al encolar los estados pseudoequivalentes (fig. 4.20, *a*) se interrumpe la determinación del dispositivo automático. Para restablecer la determinación y equivalencia del funcionamiento del dispositivo automático introduzcamos el contador organizando ciclo de longitud variable. En la fig. 4.20, *b* se ofrece el programa de funcionamiento de contadores; en el dispositivo automático a examinar $k = 7$. El contador de longitud del ciclo C_nLC realiza el ciclo exterior. El contador del número de ciclos C_nC realiza el ciclo interior. En el bloque que incluye estos contadores (fig. 4.20, *c*) se calcula el índicio γ que restablece la determinación del dispositivo automático. En este mismo bloque se calcula el índicio β del fin de la operación (como señal de relleno del contador C_nLC con la particularidad de que su estado inicial es igual a dos).

Después de restablecer la determinación del dispositivo automático encolamos los subgrafos bincidentes (fig. 4.21, *a, b*). Para restablecer la determinación del funcionamiento del dispositivo automático una vez concentrados los subgrafos bincidentes, introduzcamos otros dos contadores que tienen tres y dos estados, respectivamente.

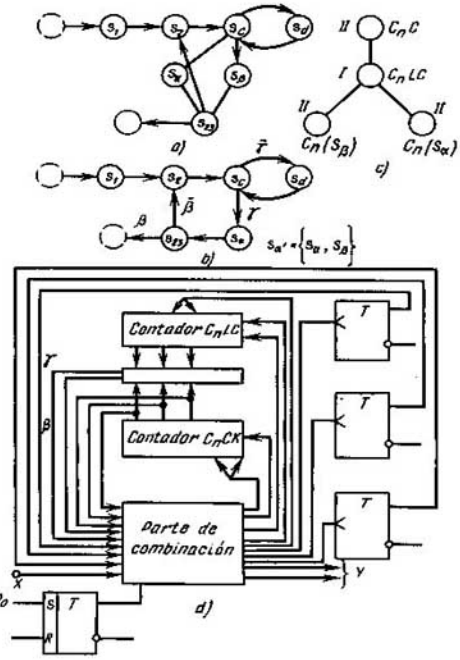


Fig. 4.21

Al restablecer la determinación del dispositivo automático introduciendo contadores, surge el problema de minimización del número de contadores que se reduce al problema de coloración del *grafo de borrado* G_b. A cada contador se le pone en correspondencia biunívoca un vértice del grafo G_b: dos vértices del grafo G_b son adyacentes, si los subgrafos del funcionamiento de contadores correspondientes tienen al menos un vértice común (el subgrafo G_α es el subgrafo del funcionamiento del contador α, si para realizar transiciones correctan en este subgrafo es necesario saber el estado del contador α).

En el caso examinar a los contadores C_nC, C_nLC, $C_n(S_\alpha)$ y $C_n(S_\beta)$ les corresponden subgrafos, cuyos portadores tienen, respectivamente, forma siguiente: $\{S_c, S_d\}$, $\{S_2, S_c, S_d, S_\alpha, S_\beta, S_{23}\}$, $\{S_\alpha\}$ y $\{S_\beta\}$. El grafo de borrado G_b para el caso considerado está representado en la fig. 4.21, *c*.

Es obvio, que dos «contadores», que corresponden a los vértices no adyacentes en el grafo de borrado, pueden ser examinados como un conta-

dor físico, ya que no existe ningún estado, en el cual sea imprescindible saber los estados de los dos contadores para que el dispositivo automático funciones correctamente. De este modo, la minimización del número de contadores se reduce a la coloración de los vértices del grafo de borrado.

En virtud de la coloración minimal de vértices del grafo de borrado (fig. 4.21, *c*), en este caso es suficiente tener dos contadores: C_nLC y C_nCK que se conecta en los momentos del funcionamiento de los contadores C_nC, $C_n(S_\alpha)$ y $C_n(S_\beta)$ (fig. 4.21, *d*).

El empleo de los contadores en el circuito de realimentación de los dispositivos automáticos de mando posibilita utilizar nudos estándares del ordenador ejecutados en forma de microcircuitos integrados.

Como resultado de la búsqueda de la descomposición óptima de los dispositivos automáticos obtenemos algunas variantes equivalentes, entre los cuales escogemos la variante final que tiene valor minimal $p(G^M)$:

$$p(G^M) = \frac{1}{|U|} \sum_{k=1}^{|U|} \left(\frac{1}{l(l-1)} \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=i+1}^{l} \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}} \right)_k, \qquad (4.11)$$

donde $|U|$ es el número de palabras en el mografo, cada una de las cuales corresponde a una transición de autómata y se representa como XS^+S^-Y; l es el número de letras (termas) que forman la palabra XS^+S^-Y; por el signo exterior Σ se halla una expresión que es valor medio de la derivada $\partial G^M/\partial S$ calculada sobre los pares de letras que forman la palabra XS^+S^-Y. A esta variante la corresponde una realización estructural más sencilla.

§ 4.6. Codificación de los estados interiores

En la etapa de *codificación de los estados interiores,* una aplicación $XS^+ \to S^-Y$ obtenida en la etapa del diseño abstracto se transforma en una aplicación $XZ^+ \to Z^-Y$, donde S^+, S^- son los identificadores de estados interiores considerados en los momentos del tiempo t y $t + \tau$, respectivamente; Z^+, Z^- son códigos de estos estados, cuyos elementos son letras del alfabeto estructural que se sintetiza; son 0 y 1 para la lógica de Boole.

Se puede codificar estados interiores del dispositivo automático partiendo de las exigencias de reducir gastos para aparatos o bien de aumentar la fiabilidad del funcionamiento del dispositivo automático, o bien de satisfacer simultáneamente las dos exigencias.

Analicemos el método de codificación que satisface la primera exigencia. El número de procedimientos de codificar N vértices del grafo de transiciones $G = \langle V, U \rangle$ aumenta, mientras que aumenta $|V|$:

$$N = \frac{i(2^{[\log_2|V|]} - 1)!}{i(2^{[\log_2|V|]} - |V|)!\,i[\log_2|V|]!}, \qquad (4.12)$$

donde [ ] es el número entero próximo. Cada procedimiento de codificación determina sus gastos de aparatos para realizar el dispositivo automático.

Hartmanis, Stearns propusieron el más interesante método *de codificación con empleo de particiones sustituyentes.* Este método se basa en disminuir la dependencia funcional de las funciones de excitación. Lamentablemente, cuando se codifican los estados del dispositivo automático de gran capacidad de memoria este método necesita mucho trabajo, lo que no permite utilizarlo para codificar estados interiores de los dispositivos automáticos de mando.

Examinemos el *método de frecuencias y matrices para codificar* los estados. Sea que como resultado de la síntesis abstracta fue construido un mografo que determina la aplicación $XS^+ \to S^- Y$. Después de la codificación obtenemos un mografo que prefija la aplicación $XZ^+ \to Z^- Y$, es decir, en el mografo inicial sustituimos los vértices correspondientes a los identificadores de los estados interiores S_i por subgrafos completos correspondientes a los códigos Z_i de los estados interiores. Este método de codificación puede realizarse empleando el siguiente algoritmo de sintetizar el árbol codificante.

1. Construimos una matriz bidimensional $Q = [q_{ij}]$, a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente una microoperación o un valor del canal de entrada (elementos del vector Y o X), a cada columna, un estado interior

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si la terma primaria correspondiente a la } i\text{-ésima fila} \\ \quad \text{que se incluye en cada par de vectores } (X, Y)(X \to Y) \\ \quad \text{que ponderan los arcos salientes del vértice } j; \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Arbitrariamente a cada estado interior (una columna de la matriz) le ponemos en correspondencia biunívoca un vértice maximal del árbol codificante que se sintetiza. Ponemos $Q = \tilde{Q}$.

2. Por la matriz $\tilde{Q}$ encontramos la matriz de frecuencia de las relaciones

$$\tilde{F} = \tilde{Q}^T \tilde{Q}.$$

3. Calculamos valores de la derivada del modelo prefijado por la matriz $\tilde{Q}$.

4. Escogemos un par de estados interiores con el valor calculado minimal de la derivada.

5. Eliminamos el par escogido de estados y en el árbol codificante le ponemos en correspondencia un vértice, origen de los arcos, cuyos extremos son los estados escogidos. Al vértice construido le ponemos en correspondencia biunívoca una columna de la matriz Q_c que se construye. Esta columna es igual al producto vectorial de las columnas de la matriz $\tilde{Q}$ que corresponden a los vértices escogidos.

6. Comprobamos, si se quedan los estados interiores no considerados, para los cuales se calcularon valores de las derivadas. Si «sí», pasamos al punto 4, en caso contrario, al punto 7.

7. Comprobamos, si está formada la matriz Q_c. Si «sí», consideramos $Q_c = \tilde{Q}$ y pasamos al punto 2, en caso contrario, al punto 8.

8. Ponemos 0 y 1 en correspondencia a cada dos arcos que salen de un vértice del árbol construido partiendo de los arcos salientes de la raíz del árbol.

El camino que une la raíz del árbol y un elemento maximal está ponderada por el código que se pone en correspondencia al estado interior que corresponde a este elemento maximal del árbol.

9. Fin.

Ilustremos el algoritmo propuesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Sea que después de la síntesis abstracta fue obtenido el grafo de transiciones G (fig. 4.22, *a*). Empleando el algoritmo propuesto codifiquemos estados interiores del dispositivo automático. Proponemos construir individualmente la matriz Q correspondiente al grafo dado. La matriz de frecuencia de relaciones correspondiente a la matriz Q tiene siguiente forma:

$$F = \begin{array}{c|cccccc|c} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & S_1 \\ & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & S_2 \\ & 2 & 0 & 5 & 2 & 1 & 1 & S_3 \\ & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & S_4 \\ & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & S_5 \\ & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & S_6 \end{array}$$

Calculamos valores de la derivada para cada par de estados:

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_1, S_3) = \frac{f_{11} - 2f_{13} + f_{33}}{f_{13}} = \frac{2 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 1{,}5;$$

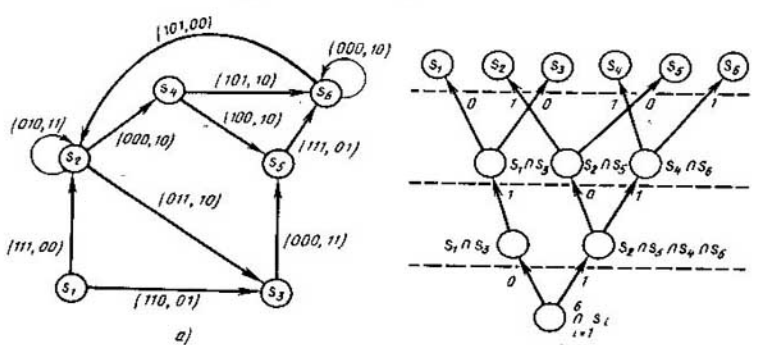


Fig. 4.22

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_1, S_4) = \frac{f_{13} - 2f_{14} + f_{44}}{f_{14}} = \frac{2 - 2\cdot 1 + 4}{1} = 4;$$

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_2, S_4) = 5; \quad \frac{\partial G^M}{\partial S}(S_3, S_6) = 6; \quad \frac{\partial G^M}{\partial S}(S_2, S_5) = 0{,}67;$$

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_4, S_5) = 7; \quad \frac{\partial G^M}{\partial S}(S_2, S_6) = 4; \quad \frac{\partial G^M}{\partial S}(S_4, S_6) = 0{,}33;$$

$$\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_3, S_4) = 2{,}5; \quad \frac{\partial G^M}{\partial S}(S_5, S_6) = 6; \quad \frac{\partial G^M}{\partial S}(S_3, S_5) = 8.$$

Los demás valores de la derivada son iguales a ∞. La derivada $\frac{\partial G^M}{\partial S}(S_i, S_j)$ tiene valor minimal sobre el par (S_4, S_6). A este par de estados le ponemos en correspondencia la «intersección» de los vértices correspondientes del árbol en construcción. Según el algoritmo juntamos en pares de estados S_2, S_5 y S_1, S_3. Como resultado construyamos el siguiente nivel del árbol.

La matriz Q_c correspondiente a los vértices del nivel construido tiene forma:

$$Q_c = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 \cap S_3 & S_2 \cap S_5 & S_4 \cap S_6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ \bar{x}_1 \\ x_2 \\ \bar{x}_2 \\ x_3 \\ \bar{x}_3 \\ y_1 \\ \bar{y}_1 \\ y_2 \\ \bar{y}_2 \end{array}$$

La matriz de frecuencia de relaciones correspondiente a la matriz Q_c tiene siguiente forma:

$$F_c = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right\|$$

La derivada del modelo $\Psi(Q_c)$ sobre los pares de estados es

$$\frac{\partial G}{\partial S}(S_2 \cap S_5,\ S_4 \cap S_6) = \frac{3 - 2\cdot 1 + 3}{1} = 6.$$

Los demás valores de la derivada son iguales a ∞. El árbol codificante buscado está representado en la fig. 4.22, *b*. Según el árbol codificante construido tenemos siguientes códigos de los estados interiores del dispositivo automático: S_1—010, S_2—100, S_3—011, S_4—110, S_5—101, S_6—111.

Examinemos la codificación de estados interiores del dispositivo automático partiendo de la satisfacción de las exigencias de fiabilidad. El funcionamiento del dispositivo automático puede interrumpirse debido al retardo desigual en el esquema real que realiza el dispositivo automático en

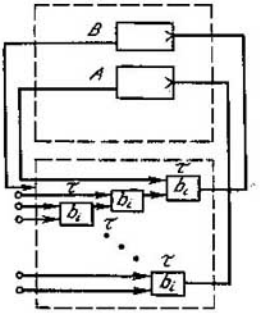


Fig. 4.23

virtud del efecto de carreras, cuya esencia puede ser ilustrada en el siguiente ejemplo (fig. 4.23). Sea que en el momento examinado dos triggers A y B se conmutan (la primera condición), con la particularidad de que la función de excitación φ de uno de éstos (por ejemplo, B) contiene en calidad de una variable el valor del trigger A, $\varphi_B = \varphi(\ldots, z_A^+, \ldots)$ (la segunda condición) y el tiempo de retardo en los esquemas de excitación de los triggers A y B se determina por la siguiente desigualdad: $\Delta_{BA} > t_A$(Δ_{BA} es el tiempo, durante el cual el valor «viejo» del trigger A existe en el esquema de excitación del trigger B; t_A es el tiempo de retardo de la señal de excitación del trigger A) (la tercera condición).

Cumpliendo estas tres condiciones el valor del trigger no será calculado correctamente (ya que para el cálculo correcto es necesario que el trigger A conserve su valor «viejo» por lo menos durante 2τ (después de empezar la transición del dispositivo automático), pero el trigger A «renueva» su valor dentro de τ). Esto es el llamado *efecto de carreras.* Al haber dicho efecto el dispositivo automático no pasa al estado indicado para la transición dada, lo que interrumpe la correspondencia de autómata.

Se puede eliminar las carreras interrumpiendo una de las tres condiciones de éstas. Para interrumpir la tercera condición, o sea, para cumplir la desigualdad $\Delta_{BA} < t_A$ es necesario tener esquemas de excitación de los triggers A y B para determinar Δ_{BA} y t_A. Se puede obtenerlos sólo en la etapa de la síntesis estructural, para cuya realización son necesarios los resultados de codificación de los estados interiores. Por consiguiente, eliminando lógicamente las carreras es imposible interrumpir la tercera condición. Técnicamente se puede realizarlo introduciendo la segunda cascada de elementos de reacción o bien por medio del cumplimiento simultáneo del esquema del dispositivo automático.

La segunda condición de carreras ($\varphi_B = \varphi(\ldots, z_A^+, \ldots)$ puede ser interrumpida por medio de desatar funcionalmente los elementos de memoria, por ejemplo, empleando particiones sustituyentes.

La primera condición (conmutación de dos, y más elementos de memoria durante una transición del dispositivo automático) se interrumpe, si durante cualquier transición del dispositivo automático se conmuta sólo un elemento de memoria. Esto significa que a cada estado interior del dispositivo automático se le pone en correspondencia un código tal que si existe la transición del estado S_i al estado S_j ($S_i \neq S_j$), sus códigos correspondientes se diferencian solamente en un orden. En otras palabras, durante la realización del dispositivo automático las carreras ausentan, si se puede colocar el grafo correspondiente de transiciones en un hipercubo n-dimensional de tal modo que las transiciones del estado S_i al estado S_j ($S_i \neq S_j$) se realicen sólo por las aristas del hipercubo y los códigos de vértices correspondientes del hipercubo se hayan puesto en correspondencia a los vértices del grafo de transiciones. Esta codificación se denomina *vecina.*

Digamos que para un grafo de transiciones es posible la codificación vecina por los códigos de longitud n, si éste es encajable en un cubo n-dimensional. Expongamos la condición de encajabilidad del grafo de transiciones en el hipercubo.

Del análisis del hipercubo se desprende que si el número cromático $h(G)$ de un grafo de transiciones G (sin contar los arcos que son los lazos) es más que dos, para este grafo de transiciones no existe la codificación vecina. Por lo tanto, para que el grafo de transiciones G tenga codificación vecina hace falta que no contenga ciclos de longitud impar. Si los contiene, es necesario eliminar todos los ciclos de longitud impar introduciendo estados interiores complementarios, en los cuales no se realiza la aplicación $X \rightarrow Y$. Estos estados se denominan estados interiores *inestables.*

Examinemos un algoritmo exacto de la codificación vecina basado en contar figuras prohibidas que caracterizan el carácter cubicable del grafo codificado.

Ejemplo 4.3. Sea dado un grafo de transiciones del dispositivo automático (fig. 4.24) que se representa sin los lazos, arcos múltiples y la orientación (ya que todo esto no es sustancial para resolver el problema de la codificación vecina). En correspondencia con las codiciones deducidas anteriormente para que sea posible la codificación vecina, es necesario y suficiente que el grafo no contenga subgrafos críticos prohibidos. Al diseñar el dispositivo automático es necesario transformar estos grafos de tal modo que todos ellos se hagan cubi-

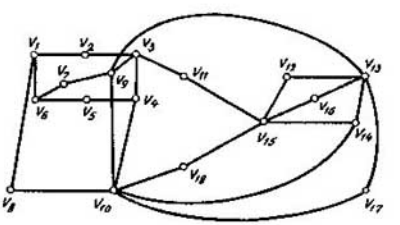


Fig. 4.24

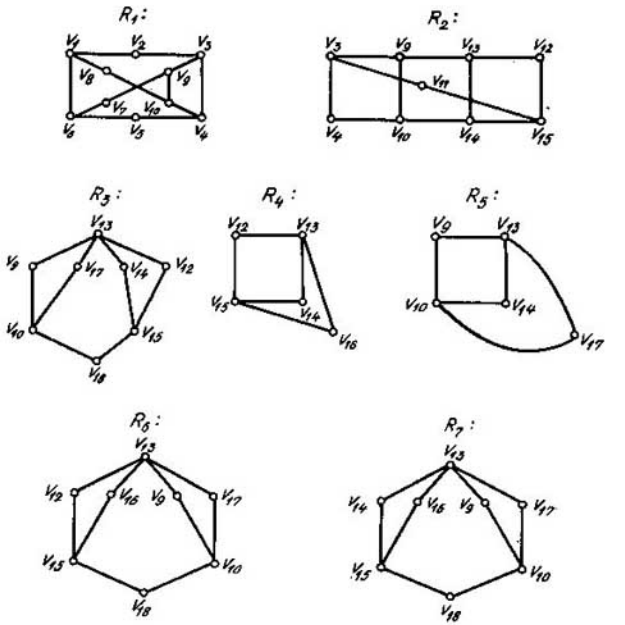


Fig. 4.25

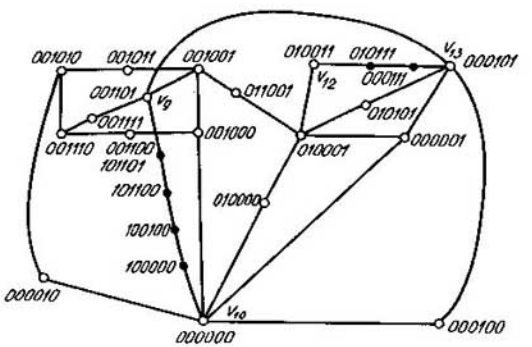


Fig. 4.26

cables. La transformación dada no interrumpe el funcionamiento del dispositivo automático sólo en el caso, cuando cada grafo nuevo es homeomorfo al anterior. De hecho la transformación se reduce a añadir los vértices nuevos a unas aristas del cada grafo crítico inicial que es el subgrafo del grafo dado de transiciones. De este modo introducimos los estados interiores inestables del dispositivo automático. En el diseño óptimo el número de estados inestables introducidos debe ser mínimo.

La tabla bidimensional (tabla 4.7) de distribución de aristas por las figuras prohibidas (fig. 4.25) se cubre por dos filas $\{l_{13}, l_{21}\}$. Añadiendo entre los vértices v_9, v_{10} y v_{12}, v_{13} los que corresponden a los estados inestables, encajamos el grafo obtenido en el espacio booleano (fig. 4.26).

Tabla 4.7

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
$l_1 = \{v_1, v_2\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_2 = \{v_2, v_3\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_3 = \{v_3, v_4\}$	1	1	0	0	0	0	0
$l_4 = \{v_4, v_5\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_5 = \{v_5, v_6\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_6 = \{v_1, v_6\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_7 = \{v_6, v_7\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_8 = \{v_7, v_9\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_8 = \{v_7, v_9\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_9 = \{v_3, v_9\}$	1	1	0	0	0	0	0
$l_{10} = \{v_1, v_8\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_{11} = \{v_8, v_{10}\}$	1	0	0	0	0	0	0
$l_{12} = \{v_4, v_{10}\}$	1	1	0	0	0	0	0
$l_{13} = \{v_9, v_{10}\}$	1	1	1	0	1	1	1
$l_{14} = \{v_9, v_{13}\}$	0	1	1	0	1	1	1
$l_{15} = \{v_{10}, v_{18}\}$	0	0	1	0	0	1	1
$l_{16} = \{v_{10}, v_{14}\}$	0	1	0	0	1	0	0
$l_{17} = \{v_{10}, v_{17}\}$	0	0	1	0	1	1	1
$l_{18} = \{v_{15}, v_{18}\}$	0	0	1	0	0	1	1
$l_{19} = \{v_3, v_{11}\}$	0	1	0	0	0	0	0
$l_{20} = \{v_{11}, v_{15}\}$	0	1	0	0	0	0	0
$l_{21} = \{v_{12}, v_{13}\}$	0	1	1	1	0	1	0
$l_{22} = \{v_{12}, v_{15}\}$	0	1	1	1	0	1	0
$l_{23} = \{v_{13}, v_{14}\}$	0	1	1	1	1	0	1
$l_{24} = \{v_{14}, v_{15}\}$	0	1	1	1	0	0	1
$l_{25} = \{v_{15}, v_{16}\}$	0	0	0	1	0	1	1
$l_{26} = \{v_{13}, v_{10}\}$	0	0	0	1	0	1	1
$l_{27} = \{v_{13}, v_{17}\}$	0	0	1	0	1	1	1

Al introducir los vértices complementarios en el grafo no se interrumpen las figuras permitidas (ciclos de longitud par).

§ 4.7. Diseño estructural de los dispositivos automáticos

Examinemos el diseño del esquema lógico como síntesis del grafo booleano correspondiente. Partamos todo el conjunto de bases en dos clases: *topológicas* y *funcionales*.

En las bases topológicas para la síntesis se utilizan funciones, cuya completitud puede lograrse por medio de la correspondiente simulación física de variables binarias y por la determinada agrupación de los elementos prefijados. Todos los elementos de conmutación, llaves de corriente, criotrones, interruptores de alumbrado, espacistores, deplistores, unitrones y otros elementos de válvula, que en la técnica de cálculos se utilizan como elementos de acción rápida, forman bases de este tipo.

En las bases funcionales, los elementos, independientemente de su agrupación y la simulación física de variables binarias, realizan las funciones que forman un sistema completo de funciones booleanas. Por ejemplo, se refieren a estas bases los elementos que realizan las funciones de Sheffer, de Webb, de implicación, etc.

Partamos, a su vez, el conjunto de bases topológicas en cuatro clases. La primera y la segunda clase las forman elementos que dejan pasar la señal de información en un sentido cuando el valor de la señal de control coincide con la letra que pondera este elemento. Pero, en los elementos de la primera clase, la señal pasada se difunde por los canales de conductividad unilateral en los elementos de la segunda clase, por los canales de conductividad bilateral.

La primera clase comprende elementos de válvula-diodo, en caso del procesamiento óptico de la información con el empleo de la técnica de fibras, es decir, los interruptores de alumbrado; la segunda clase comprende elementos de válvula (por ejemplo, espacistor-triodo).

En las entradas de un esquema compuesto de elementos que se examinan y en las de un esquema construido de los elementos de cualquier base topológica se usa la representación parafásica de la información binaria.

La tercera y la cuarta clase las forman elementos que dejan pasar la señal de información en los dos sentidos cuando coinciden el valor de la señal de control y la letra que pondera este elemento.

En los elementos de la tercera clase la señal pasada se propaga por los canales de conductividad unilateral y en los elementos de la cuarta clase, por los de conductividad bilateral.

Entre los elementos de la tercera clase figuran, por ejemplo, los tuneltrones y los elementos de contacto-diodo; entre los de la cuarta, elementos conmutadores de conductividad bilateral (criotrones y contactos).

De este modo, todo el conjunto de bases topológicas está dividido en cuatro clases según dos características: conductividad de elemento y conductancia del canal de conexión.

Como resultado de la optimización abstracta y la codificación de estados interiores del dispositivo automático, un sistema de funciones de excitación y de salida prefija el operador de autómata. La realización en esquemas, óptima por su complejidad, de estas funciones es un proceso de trabajo denso, lo que está condicionado por el carácter combinatorio del

problema. Uno de los caminos eficaces para disminuir la densidad de trabajo de la realización en esquemas del operador de autómata es reducir dimensiones de los problemas empleando la descomposición. Para las funciones que se obtienen como resultado de la descomposición, se puede construir los esquemas óptimos. La descomposición óptima está orientada a lograr la optimicidad global de la resolución del problema de realizar el operador de autómata en esquema.

La descomposición de la función $f(X)$, $X = \{x_1, ..., x_n\}$ es su representación en forma de superposición de varias funciones de menor dimensión: $f(X) = F(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)), ..., \varphi_k(X_k)$, donde $X_i \subseteq X$. La función F se denomina *exterior*, las funciones $\varphi_1, ..., \varphi_k$ se llaman *conjugadas*. El criterio de calidad de la descomposición es el mínimo del número de las funciones conjugadas.

La descomposición debe satisfacer las siguientes exigencias prácticas:

1) tener en cuenta las particularidades de las funciones que se encuentran en la práctica de la proyección;

2) aumentar la fiabilidad de los dispositivos automáticos en diseño a cuenta de bajar la probabilidad de surgimiento del riesgo.

La primera exigencia supone que se puede aplicar bien el método a las funciones débilmente definidas, que aparecen con la mayor frecuencia en la práctica, es decir, las funciones cuya potencia en un campo definido es mucho menor que la del campo indefinido. La segunda exigencia impone una restricción sobre la longitud de los caminos en la realización en esquema de la función, los caminos que se determinan por la profundidad, a que entran en la función los correspondientes argumentos. Por ejemplo, la probabilidad de que surja el riesgo para la función $f(X) = F(\varphi_1(\varphi_{11}(x_1, ...), \varphi_{12}(\varphi_{121}(x_2...), \varphi_{122}(x_3 ...), ...), \varphi_{13} ...), \varphi_2(\varphi_{21}(x_4 ...), ..., x_5), ..., x_6)$ es proporcional a la suma de módulos de las diferencias de las profundidades a que los argumentos entran en las subfunciones. Para la función dada, la profundidad de entrada de la variable x_6 es igual a cero, de la variable x_3, a tres. La validez de esta afirmación se basa en las siguientes suposiciones: los sucesos en los que pueda surgir el riesgo en las funciones conjugadas son independientes; la probabilidad de que surja el riesgo en la función es proporcional al módulo de diferencia de las longitudes de los caminos por las que pasan las señales, es decir, en la representación de la función $F(\varphi_1(x_1, ...), x_2)$ la probabilidad de que surja el riesgo es dos veces menor que en la representación de la función $F(\varphi_1(\varphi_2(x_3, ...), x_1), x_2)$. Por lo tanto, la probabilidad de que surja el riesgo para la función $f(X)$ es proporcional al desbalance de longitudes de los caminos d_l en el esquema que realiza $f(X)$, $d_l = \Sigma \mid l_{med} - l_i \mid$, donde l_{med} es la longitud media del camino, l_i es la longitud del i-ésimo camino. El desbalance d_l puede valorarse por el desbalance de las profundidades de entradas d_ν que se obtiene de d_l sustituyendo l_i por ν_i, l_{med} por ν_{med}, donde ν_{med} es la profundidad media de entrada

de una variable en una función, v_i es la profundidad de entrada de la variable x_i en la función.

La segunda de las exigencias anteriormente aducidas se cumple automáticamente en la descomposición $f(X)$ tipo

$$F(\varphi_1(X_A), \ldots, \varphi_p(X_A), \xi_1(X_B), \ldots, \xi_s(X_B)), \tag{4.13}$$

donde $X_A \cup X_B = X$, $X_A \cap X_B = \varnothing$.

Examinemos el método de la descomposición estructural y funcional tipo (4.13) orientado a las funciones débilmente definidas. Se basa en la representación de la función por un K-grafo. Llámase *K-grafo* un grafo de dos partes $G^K = \langle V^A, V^B, U_1, U_0 \rangle$, en el cual los conjuntos V^A y V^B determinan el conjunto de vértices G^K, mientras que U_1 y U_0 son los conjuntos que representan aristas de dos tipos que unen los vértices de V^A y V^B.

De la partición del conjunto X en X_A y X_B se desprende la partición de cada juego m_i del campo unitario de definición de la función $f(X)$ en dos subjuegos m_i^A y m_i^B que comprenden las variables entrantes en X_A y X_B, respectivamente. Los campos unitario y nulo se determinan mediante las colecciones de los pares de subjuegos (m_i^A, m_i^B). De tal modo, la función $f(X)$ con la partición prefijada de X en X_A y X_B se representa por el K-grafo $G^K = \langle V^A, V^B, U_1, U_0 \rangle$, donde V^A es el conjunto de subjuegos m_i^A, V^B es el conjunto de subjuegos m_i^B, U_1, U_0 son las relaciones binarias que determinan los campos unitario y nulo de la función.

Examinemos la función booleana débilmente definida $f(X)$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. La función $f(X)$ toma el valor 1 sobre el conjunto de juegos $M_1 = \{1010, 0111, 1101, 1100\}$; toma el valor 0 sobre el conjunto de juegos $M_0 = \{0001, 1000, 1011\}$. Sean $X_A = \{x_1, x_2\}$, $X_B = \{x_3, x_4\}$. El K-grafo G^K que representa $f(X)$ con la partición dada X aparece reflejado en la fig. 4.27, *a*. Las aristas tachadas forman el conjunto U_0, las no tachadas, el conjunto U_1.

Definamos la operación de encolamiento de los vértices en el K-grafo. Dos vértices de una clase v_1 y v_2 pueden encolarse, si no existe el vértice w de otra clase ligada con un vértice por la arista y con otro, por la arista tachada. Como resultado del encolamiento los vértices se sustituyen por uno y sus entornos se agrupan. Por ejemplo, después de encolar los vértices correspondientes a los juegos $\bar{x}_1 x_2$ y $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, el K-grafo tiene forma dada en la fig. 4.27, *b*. Notemos que el encolamiento de los vértices de una clase cambia las condiciones del encolamiento de los de otra clase. Encolaremos los vértices del K-grafo hasta que sea posible. El K-grafo resultante está representado en la fig. 4.27, *c*.

Teorema 4.2. *Una función booleana* $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es representable en forma* $f(X) = F(\varphi_1(X_A), \ldots, \varphi_p(X_A), \xi_1(X_B), \ldots, \xi_s(X_B))$, $X_A \cap X_B = \varnothing$, $X_A \cup X_B = X$, $p < |X_A|$, $s < |X_B|$ *si, y sólo si, existe una sucesión de operaciones de encolamiento que reduce el K-grafo* $G^K = \langle V^A,$

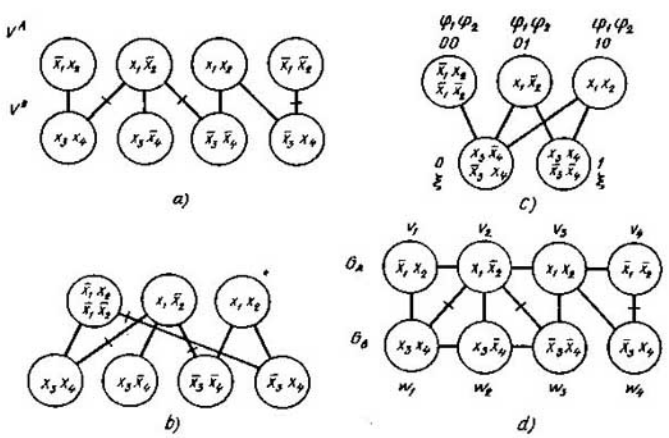


Fig. 4.27

$V^B, U_1, U_0\rangle$, *que representa la función, al K-grafo* $G^K = \langle V_1^A, V_1^B, U_1', U_0'\rangle$ *que tiene* $|V_1^A| \leqslant 2^p$, $|V_1^B| \leqslant 2^s$.

El criterio de calidad de la descomposición es el mínimo del número de funciones φ_i y ξ_i que se alcanza minimizando el número de vértices en las clases del *K*-grafo después de encolar. El proceso de encolar los vértices es equivalente a la coloración de los grafos de incompatibilidad $G_A = \langle V^A, U^A\rangle$ y $G_B = \langle V^B, U^B\rangle$. Los portadores de estos grafos son las clases de los vértices V^A y V^B. Dos vértices v_1 y v_2 de un grafo de incompatibilidad son adyacentes, si uno de ellos se une con un vértice de otra clase mediante una arista y el otro, mediante una arista tachada. Los grafos de incompatibilidad para el *K*-grafo representado en la fig. 4.27, *a* se ofrecen en la fig. 4.27, *d*.

Si fijamos el mismo color de dos vértices del grafo de incompatibilidad, esto es equivalente a encolarlos y por esta razón, en caso general, lleva a introducir nuevas aristas en otro grafo de incompatibilidad. Si los vértices v_1 y v_2 de un grafo G_i ($i = A, B$) pasan a ser de un mismo color, en G_j ($j = A, B, j \neq i$) se introducen las aristas (w_1, w_2) tales que en la configuración de G_A y G_B los v_1 y w_1 se unen mediante una arista, v_2 y w_2, mediante una arista tachada. De aquí se deduce que en caso general la coloración de configuraciones de los grafos de incompatibilidad no se determina por su coloración independiente. El proceso de encolamiento es equivalente a la coloración conexa de los grafos de incompatibilidad. Como *coloración conexa* de la configuración de grafos G_A y G_B se comprende una partición de los vértices de los grafos en clases (y atribución de un mismo color a

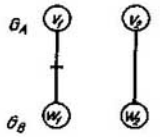


Fig. 4.28

los vértices de cada clase) tal que en cada clase, los vértices no son adyacentes dos a dos y, además, en G_A, los vértices de cualquier clase no pueden unirse simultáneamente mediante las aristas y aristas tachadas con los vértices de una clase G_B. Por lo tanto, la descomposición de una función booleana débilmente definida se reduce a la coloración conexa de los grafos de incompatibilidad.

Aunque en caso general la coloración independiente de cada uno de los grafos no determina la coloración conexa es muy interesante encontrar las condiciones, en los cuales la coloración independiente de los grafos de incompatibilidad da la coloración conexa, puesto que en este caso el problema de descomposición se simplifica considerablemente.

Teorema 4.3. *La coloración independiente de los grafos G_A y G_B determina su coloración conexa si, y sólo si, la configuración de G_A y G_B no contiene la configuración de G_{AB} en calidad de subgrafo* (fig. 4.28).

□*Necesidad.* Sea que la coloración conexa de los grafos G_A y G_B se reduce a su coloración independiente. Esto significa que la coloración conexa de cualquier subgrafo de la configuración se determina también por la coloración independiente de los grafos que la integran. La coloración conexa de la configuración de G_{AB} no se determina por la configuración independiente, por eso la configuración de G_A y G_B no puede contener G_{AB} en calidad de subgrafo.

Suficiencia. Sea que la coloración conexa de los grafos G_A, G_B no se determina por su coloración independiente. Sea también que fijando los colores iguales de vértices no adyacentes v_1, v_2 del grafo G_A llegamos a introducir la arista (w_1, w_2) en el grafo G_B. Esto es posible sólo en el caso cuando uno de los vértices v_1, v_2 se une con uno de los vértices w_1, w_2 mediante la arista y el otro se vincula con el restante mediante la arista tachada. Otras aristas entre v_1, v_2 y w_1, w_2 no pueden existir ya que en caso contrario serían adyacentes a v_1, v_2 o w_1, w_2. Pero la configuración descrita de v_1, v_2 y w_1, w_2 es la configuración de G_{AB} con exactitud de hasta la redesignación. Por lo tanto, si G_{AB} no se presenta en la configuración de G_A, G_B como un subgrafo generado, la coloración independiente de G_A y G_B determina su coloración conexa. ■

Si sabemos la configuración de G_{AB}, podemos proponer el aparato constructivo para reducir la coloración conexa a la independiente. Para cada subgrafo de la configuración, isomorfo a G_{AB}, con los vértices v_1, v_2,

w_1, w_1 introduzcamos los vértices v_1', v_2', w_1', w_2'. Unamos v_1' con los vértices de $\Gamma(v_1)$; v_2', con los de $\Gamma(v_2)$; w_1', con los de $\Gamma(w_1)$; w_2', con los de $\Gamma(w_2)$. Introduzcamos también las aristas (v_1', v_2') y (w_1', w_2'). La configuración obtenida la denominaremos *extensión* y denotaremos G_A^*, G_B^*. Hallemos la coloración independiente de G_A^* y G_B^*. Ahora realicemos la operación de reducción: para toda configuración de G_{AB} eliminemos los vértices v_1, v_2 y w_1, w_2, si el vértice v_1 es del mismo color que v_2 y w_1 es del mismo color que w_2. Pero, si por lo menos un par de v_1, v_2 y w_1, w_2 no es concoloreado, eliminemos v_1', v_2', w_1', w_2'. Resulta la coloración conexa de la configuración de G_A, G_B.

Ejemplo 4.4. La extensión de G_A, G_B para la configuración de G_A, G_B dada en la fig. 4.27, *a* y la coloración independiente de G_A, G_B están representadas en la fig. 4.29. Como resultado de la extensión de G_A y G_B obtenemos el encolamiento del K-grafo ofrecido en la fig. 4.27, *c*.

Codifiquemos los vértices de cada clase. La longitud del código de ésta es igual a $]\log_2 s[$, donde s es el número de vértices en la clase. Cada código determina un juego definido sobre nuevas variables, obtenidas como resultado de la codificación: φ_i, para una clase ξ_i, para otra. De este modo, el K-grafo determina una nueva función F, exterior en la descomposición (4.13). La descomposición de la función considerada se determina del modo siguiente:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \xi(x_3, x_4)).$$

La función $F(\varphi_1, \varphi_2, \xi)$ toma el valor unitario sobre el conjunto de juegos $M_1 = \{\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2\bar{\xi}, \bar{\varphi}_1\varphi_2\bar{\xi}, \bar{\varphi}_1\varphi_2\xi\}$ y el valor nulo sobre el conjunto de juegos $M_0 = \{\bar{\varphi}_1\varphi_2\xi, \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2\xi\}$. Con ello, $\varphi_1\varphi_2$ y ξ son las funciones débilmente definidas. Para ellas escribamos los conjuntos de juegos unitarios y nulos:

$$M_1(\varphi_1) = \{x_1x_2\},\ M_0(\varphi_1) = \{\bar{x}_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2,\ x_1\bar{x}_2\};$$
$$M_1(\varphi_2) = \{x_1\bar{x}_2\},\ M_0(\varphi_2) = \{\bar{x}_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2,\ x_1x_2\};$$
$$M_1(\xi) = \{x_3x_4,\ \bar{x}_3\bar{x}_4\},\ M_0 = (\xi) = \{x_3\bar{x}_4,\ \bar{x}_3x_4\};$$

La signatura de las álgebras determina *leyes de composición*, cuyas propiedades se prefijan por las identidades de las álgebras. Las leyes de compo-

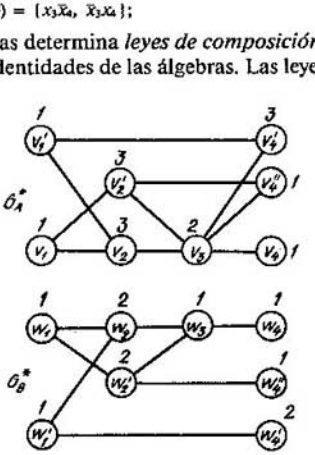


Fig. 4.29

sición permiten determinar el funcionamiento de un todo único por el funcionamiento de sus partes. Durante la síntesis de los sistemas el funcionamiento de un todo único está prefijado y es necesario determinar el funcionamiento de sus partes, o sea, construir una estructura que realiza el funcionamiento prefijado. En la síntesis no tienen interés las leyes de composición, sino las *de descomposición.*

Examinemos un modelo

$$\Psi = \langle M,\ P_1^f,\ P_2^f,\ \ldots,\ P_n^f \rangle,$$

donde

$$P_i^f(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k) = \begin{cases} 1, \text{ cuando } m_k = f_i(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{k-1}), \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Análogamente al concepto del *álgebra*

$$A\langle M,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n \rangle,$$

introduzcamos el concepto de la *coálgebra*

$$K = \langle M,\ \varkappa_1^f,\ \varkappa_2^f,\ \ldots,\ \varkappa_n^f \rangle,$$

donde M es el portador de la coálgebra, $\varkappa_1^f,\ \varkappa_2^f,\ \ldots,\ \varkappa_n^f$ es su signatura. El procedimiento de determinar por m_k un conjunto $\{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{k-1}\}$, tal que $m_k = f_i(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{k-1})$, se denomina *co-operación* $\varkappa_i^f(m_k)$,

$$\varkappa_i^f(m_k) = \{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{k-1}\}.$$

Es obvio que, si el resultado de operaciones f_i es estrictamente unívoco, el de la co-operación $\varkappa_i^f$ no lo es. El álgebra determina las leyes de composición, la coálgebra, las de descomposición.

Así como existen, por ejemplo, las álgebras de Boole, las de Webb, el álgebra implicativa, el álgebra de Zhegalkin es lógico, desarrollando la teoría de las coálgebras, esperar que aparezca la coálgebra de Boole, la de Webb, la implicativa, la de Zhegalkin.

En el presente está elaborada solamente la coálgebra de grafos que es isomorfa a la coálgebra de Boole, cuyo portador está prefijado por los diagramas de Hasse o por los grafos estructurales.

En un grafo estructural, cada vértice está ponderado por una terma primaria $x_i^{\sigma_i}$ y el camino corresponde biunívocamente a un intervalo maximal (implicante simple) de una función booleana $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Llámase *coálgebra de los grafos* una colección de la forma

$$K = \langle M,\ \varkappa^{\vee},\ \varkappa^{-} \rangle,$$

donde el portador M es el conjunto de todos los grafos estructurales posibles, la signatura es la *co-operación de disyunción* $\varkappa^{\vee}$ y la *co-operación de negación* $\varkappa^{-}$ de los grafos estructurales. A continuación, estas dos co-operaciones se denominarán *operación de descomposición* $\varkappa^{\vee}$ y *operación de inversión* $\varkappa^{-}$ de los grafos, respectivamente.

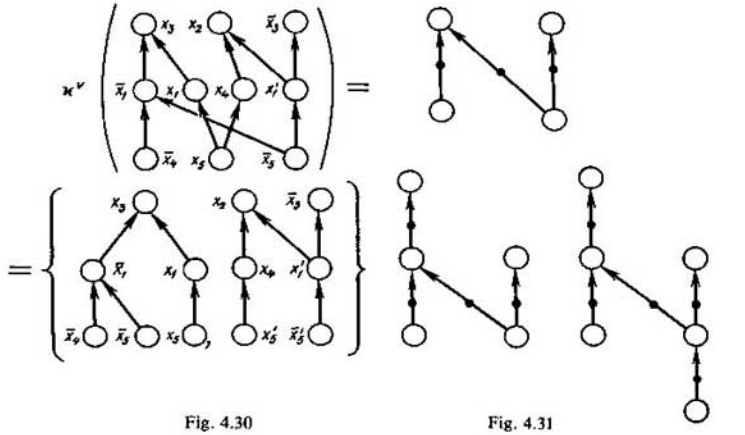


Fig. 4.30 Fig. 4.31

Operación de descomposición $\varkappa^-$ de los grafos. Cumpliendo esta operación se indican las direcciones, en las cuales se transcurre la descomposición del grafo H. La dirección se prefija mediante los vértices que son los elementos maximales de los subgrafos del grafo H.

La operación de descomposición $\varkappa^-(H)$ del grafo H en direcciones V_i ($i = 1, \ldots, k$) es la formación respectiva de los subgrafos H_i ($i = 1, \ldots, k$) compuestos de todos los vértices $\{v_j/j = 1, \ldots, l\}$ y los arcos que los unen, para los cuales en el grafo H existe un camino que une $v_a \in \{v_j/j = 1, \ldots, l\}$ y $v_b \in V_i$.

Por ejemplo, el resultado de la operación de descomposición del grafo estructural H en las direcciones $\{x_3\}$ y $\{x_2, \bar{x}_3\}$ está efectuado en la fig. 4.30. El signo (') marca las letras repetidas, para que éstas identifiquen los vértices del grafo.

La operación de inversión de $\varkappa^-$ grafos. El grafo estructural representado en forma de la superposición de estructuras tipos π y σ se denomina *grafo tipo* $\pi\sigma$.

La operación de inversión $\varkappa^-(H)$ de un grafo estructural H es la reducción del grafo dado a un grafo tipo $\pi\sigma$ utilizando su descomposición, la sustitución de cada subgrafo tipo σ por un subgrafo tipo π y de cada subgrafo tipo π por un subgrafo tipo σ; con ello, cada peso $x_i^{\sigma_i}$ del grafo inicial se sustituye por el peso $x^{(\sigma_i+1) \bmod 2}$ en los vértices correspondientes del grafo obtenido.

Para la propiedad de los grafos estructurales de ser grafos tipo $\pi\sigma$ son prohibidas las figuras H_Γ (fig. 4.31). Por consiguiente, la desintegración mi-

nimal de un grafo estructural, cuando éste se reduce al tipo $\pi\sigma$-grafos, se determina por el cubrimiento minimal de una tabla, en la cual los subgrafos H_Γ son las figuras prohibidas, y sus componentes son los vértices de potencia dos (vértices minimales y maximales de la diagonal), uno de los cuales se desintegra durante la transformación.

En el ejemplo a examinar (véase la fig. 4.30) la tabla descrita puede representarse en forma de la tabla 4.8.

Tabla 4.8

Componentes		H_{Γ_1}	H_{Γ_2}	H_{Γ_3}	H_{Γ_4}
a	$(\bar{x}_1, x_2)$	1	0	0	0
b	$\bar{x}_5$	1	0	0	0
c	x_2	0	1	0	1
d	$(\bar{x}_5, x_1')$	0	1	0	0
e	x_3	0	0	1	0
f	x_5	0	0	1	1

Tenemos seis cubrimientos de esta tabla:

$$(a \vee b)(c \vee d)(e \vee f)(c \vee f) = ace \vee bec \vee bcf \vee adf \vee bdf \vee afc.$$

Para ser precisos, escogemos el cubrimientos $\{b, c, f\}$. Entonces el grafo estructural considerado H es representable por la descomposición de los subgrafos π, σ :

$$H = \sigma(\pi(x_3, \sigma(\pi(x_1, x_5), \pi(\bar{x}_1, \sigma(\bar{x}_4, \bar{x}_5)))),$$
$$\sigma(x_2, x_4, x_5'), \pi(\sigma(x_2', \bar{x}_3), x_1', \bar{x}_5')).$$

En este caso, la inversión del grafo $\varkappa^-(H) = \overline{H}$ (fig. 4.32) es la expresión de la forma

$$\overline{H} = \pi(\sigma(\bar{x}_3, \pi(\sigma(\bar{x}_1, \bar{x}_5), \sigma(x_1, \pi(x_4, x_5)))),$$
$$\sigma(\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_5'), \sigma(\pi(\bar{x}_2', x_3), \bar{x}_1', x_5')).$$

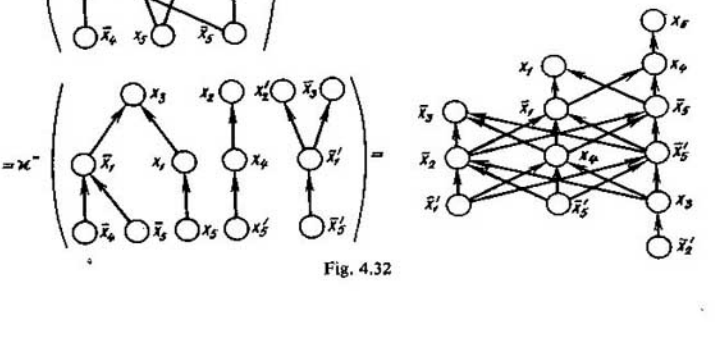


Fig. 4.32

Al sintetizar los esquemas lógicos en una base funcional B, es necesario determinar resultados de los co-operaciones tipo

$x^{f_{b_i}}(b_i \in B)$, es decir,

$$x^{f_{b_i}}(H) = \{H_1, H_2, \ldots, H_{k_{ent}}\}, \tag{4.14}$$

donde k_{ent} es el coeficiente de entrada del elemento b_i.

Se puede obtener el resultado de la co-operación $x^{f_{b_i}}$ empleando respectivamente una serie de co-operaciones tipo $x^{\vee}$ y x^{-} en el orden inverso del que siguen las operaciones $\vee$ y $^{-}$ en la descomposición de la operación f_{b_i} en $\vee$ y $^{-}$. Por ejemplo, determinamos los resultados de la co-operación de Sheffer $x'(H)$ empleando la coálgebra de los grafos del modo siguiente.

Sea necesario hallar el resultado $\{H_1, H_2\}$ de la co-operación $x'(H)$, es decir,

$$x'(H) = \{H_1, H_2\}. \tag{4.15}$$

Los grafos H_1 y H_2 son los resultados de $x'(H)$ si, y sólo, si según la definición de co-operación, sus funciones correspondientes $f_1(H_1)$ y $f_2(H_2)$ están ligadas como

$$f(H) = f_1(H_1) \mid f_2(H_2).$$

Pero, por otra parte, $f(H) = \overline{f_1(H_1)} \vee \overline{f_2(H_2)}$. De aquí, según la definición de la co-operación y las igualdades

$$x^{\vee}(H) = \{H_1', H_2'\}, \; x^{-}(H_1') = H_1, \; x^{-}(H_2') = H_2,$$

es decir, para la base de Sheffer la igualdad (4.15) puede reducirse al sistema

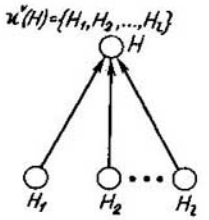
$$\begin{cases} H_1 = x^{-}(H_1' \in x^{\vee}(H)), \\ H_2 = x^{-}(H_2' \in x^{\vee}(H)). \end{cases}$$

A continuación el j-ésimo componente del resultado de la co-operación $x^{f_{b_i}}(H) = \{H_1, H_2, \ldots, H_j, \ldots, H_{k_{ent}}\}$ se designará por $x^{f_{b_i}}(H) \mid_j$, es decir, $H_j = x^{f_{b_i}}(H) \mid_j$.

En el caso que se examina la ecuación (4.15) está reducida al sistema de la forma

$$\begin{cases} H_1 = x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_1), \\ H_2 = x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_2). \end{cases}$$

Reduciendo el problema de determinar el resultado $\{H_1, H_2, \ldots, H_{k_{ent}}\}$ de la co-operación $x^{f_{b_i}}(H)$ al problema de determinar los resultados de las co-operaciones $x^{\vee}$ y x^{-} se reduce, en esencia, la ecuación estructural (4.14) resuelta respecto a $\{H_1, H_2, \ldots, H_{k_{ent}}\}$ al sistema compuesto de k_{ent} ecuaciones estructurales con la particularidad de que cada ($j = 1, \ldots$



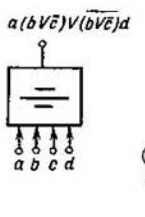


Fig. 4.33

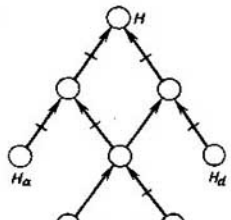


Fig. 4.34

. . ., k_{ent}) ecuación estructural del sistema está resuelta respecto a H_j, es decir,

$$\begin{cases} H_1 = x^{\alpha_{11}}(x^{\alpha_{12}} \ldots (x^{\alpha_{1n_1}}(H)) \ldots), \\ H_2 = x^{\alpha_{21}}(x^{\alpha_{22}} \ldots (x^{\alpha_{2n_2}}(H)) \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_j = x^{\alpha_{j1}}(x^{\alpha_{j2}} \ldots (x^{\alpha_{jn_j}}(H)) \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{k_{ent}} = x^{\alpha_{k_{ent}1}}(x^{\alpha_{k_{ent}2}} \ldots (x^{\alpha_{k_{ent}n_{k_{ent}}}}(H)) \ldots), \end{cases} \tag{4.16}$$

donde $x^{\alpha_{ij}} \in \{x^{\vee}|_k, x^{-}\}$; $i = 1, \ldots, k_{ent}$; $j = 1, \ldots, n_j$; n_j es el número entero determinado por el elemento básico b_i para cualquier j.

El sistema (4.16) es k_{ent} ecuaciones estructurales independientes una de otra. No se puede reducir la solución de la ecuación estructural (4.14) a la solución del sistema de ecuaciones de la forma (4.16) para cada elemento básico $b_i \in B$.

Determinando la forma del elemento básico, para el cual la solución de (4.14) se reduce a la solución de (4.16), partamos todo el conjunto de las bases funcionales en dos clases: *bases conexas* e *inconexas.*

De antemano, a cada elemento básico ($b_i \in B$) le ponemos en correspondencia el grafo H_{b_i} construido del modo siguiente. Expresemos la función booleana f_{b_i} que se realiza por el elemento b_i mediante las cópulas $\vee$ y $^-$. Representemos la expresión obtenida, en la que se tienen sólo las operaciones «disyunción $\vee$» y «negación $^-$» en forma del grafo H_{b_i} según la interpretación geométrica de la operación l-ádica de disyunción y de la operación de negación (fig. 4.33).

Una base $B = \{b_i/i = 1, \ldots, n\}$ se denomina *inconexa,* si ninguno de los grafos H_{b_i} que corresponden a las funciones f_{b_i}, realizados por medio de los elementos de la base, contiene ciclo.

Por ejemplo, las bases de Webb, de Sheffer, implicativas y coimplicativas (se llama operación de *coimplicación* a la negación de la implicación).

La base $B = \{b_i/i = 1, \ldots, n\}$ se denomina *conexa,* si al menos un

grafo $H_{b_i}(i\in\{1, 2, \ldots, n\})$ correspondiente a la función $f_{b_i}(i\in\{1, 2, \ldots, n\})$, realizada por uno de los elementos de la base, contiene un ciclo.

Por ejemplo, la solución de la ecuación $x^{\Delta}(H) = \{H_a, H_b, H_c, H_d\}$ correspondiente a un elemento principal de SUANI (fig. 4.34) se reduce a la solución del sistema de la forma:

$$\begin{cases} H_a = x^{-}(x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_1)) \mid_1), \\ H_b = x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_1)) \mid_2)) \mid_1), \\ H_c = x^{-}(x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_1)) \mid_2)) \mid_1, \\ H_d = x^{-}(x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_2)) \mid_2), \\ x^{-}(x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_1)) \mid_2) = x^{\vee}(x^{-}(x^{\vee}(H) \mid_2)) \mid_1. \end{cases}$$

Aquí Δ es el signo de la operación que se realiza por un elemento principal de SUANI.

En este caso, cuando se realiza la síntesis en las bases conexas, la determinación de los resultados de las co-operaciones se reduce también a la solución de un sistema de ecuaciones estructurales, pero ya dependientes una de otra.

Para sintetizar los esquemas lógicos en las bases funcionales construimos, por la función f realizada, un grafo estructural que luego transformamos en el funcional empleando la coálgebra de los grafos. El grafo funcional obtenido es el esquema lógico buscado. Proponemos el siguiente procedimiento de transformar el grafo estructural en el funcional. Examinemos el algoritmo dado a continuación en el ejemplo de la síntesis de un grafo funcional que realiza una función booleana de tres variables del contador de paridad en la base $B = \{\rightarrow, 0\}$.

El algoritmo comprende los siguientes pasos:

1. El grafo estructural H_f que realiza la función booleana f se pone en correspondencia a un elemento maximal del grafo H_b correspondiente al elemento básico $b\in B$.

2. Conforme al grafo H_b que determina las propiedades funcionales y estructurales del elemento $b\in B$ se cumplen las operaciones correspondientes de descomposición y de inversión sobre el grafo H_f.

3. Como resultado del cumplimiento de las operaciones del punto 2 se determinan los grafos estructurales H_{f_i} correspondientes a los elementos minimales del grafo H_b.

Señalemos que el elemento maximal del grafo H_b corresponde a la salida del elemento básico b, y los elementos minimales, a las entradas de este elemento.

En la fig. 4.35 se ilustra el cumplimiento de los primeros tres pasos para el ejemplo considerado.

Para cada uno de los grafos hallados H_b, los puntos 1, 2 y 3, se cumplen hasta obtener grafos estructurales que realizan funciones booleanas admi-

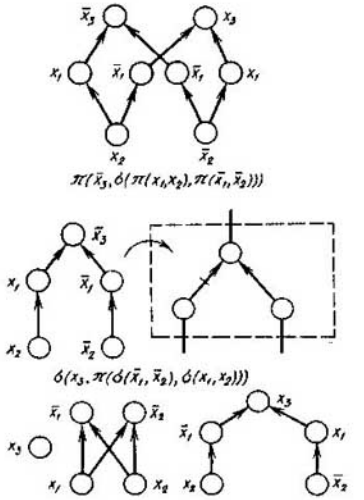


Fig. 4.35

sibles en las entradas del esquema lógico. Por lo general, tales funciones son las variables x_i o las variables y sus negaciones.

Si en i-ésimo paso de la transformación de un grafo estructural en un funcional fueron obtenidos N grafos que realizan una misma función con exactitud de hasta conjunciones idénticamente iguales a cero, estos grafos se juntan en $[N/k_{\text{ent}}]$ grupos ([ ] es el signo del número entero más próximo; k_{ent} es el coeficiente de salida (coeficiente de ramificación) del elemento básico). De tal modo, construyendo el grafo funcional se tiene en cuenta el coeficiente de ramificación de k_{ent} elementos básicos.

En la fig. 4.36 se muestra el resultado definitivo de la transformación del grafo estructural en el funcional en la base $\{\rightarrow, 0\}$.

En las bases de la primera y la tercera clase topológica la conversión $H \rightarrow S$ de un grafo estructural H a un esquema de conmutación S se realiza de una manera trivial, sustituyendo los vértices por los elementos conmutadores y los arcos, por los canales de conexión de conductividad unilateral.

En las bases de la segunda clase topológica durante la transformación $H \rightarrow S$ pueden aparecer los caminos excedentes debidos a la conductividad bilateral de los canales de conexión, si el grafo estructural H contiene el subgrafo Q_B representado en la fig. 4.37, *a*. Al quitar la orientación de los arcos (fig. 4.37, *b*) los elementos incomparables se hacen comparables y aparece un camino excedente, lo que hace el grafo salir de la clase de los grafos equivalentes en el sentido de la realización de la función prefija-

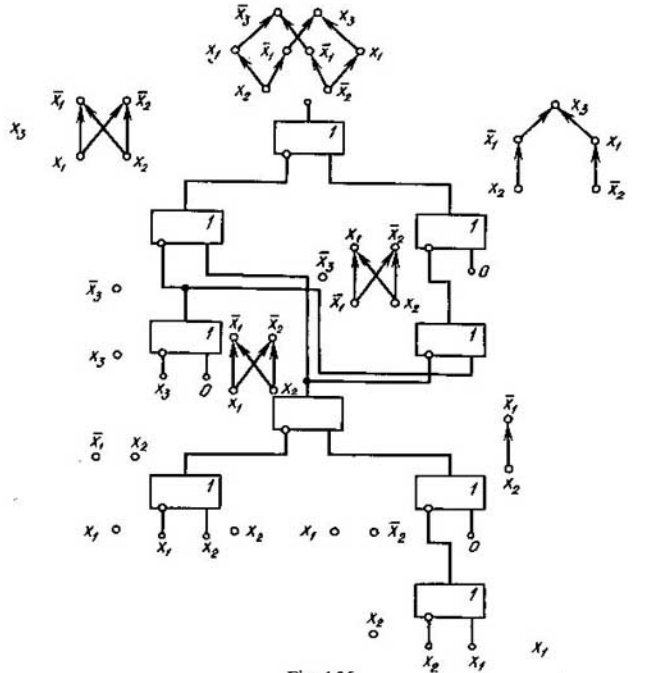


Fig. 4.36

da. Para eliminar los caminos excedentes es necesario orientar la arista diagonal colocando un diodo de desacoplo en ésta (fig. 4.37, *c*).

El grafo Q_B (fig. 4.37, *a*) es una figura prohibida de la transformación $H \rightarrow S$. Por consiguiente, la minimización de los diodos de desacoplo se reduce al cubrimiento de la tabla semántica, en la cual las figuras prohibidas son los subgrafos Q_B y sus componentes son las aristas diagonales, donde se colocan los diodos de desacoplo.

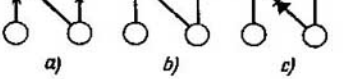


Fig. 4.37

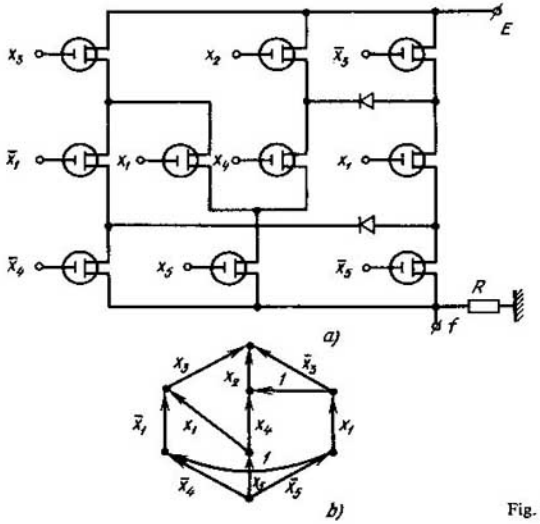


Fig. 4.38

En las bases de la segunda clase topológica, la conversión $H \rightarrow S$ se realiza (igual que en las bases de la primera clase), orientando las aristas diagonales en las figuras prohibidas Q_B. En las bases de esta clase, en la transformación $H \rightarrow S$, la abstracción del esquema de conmutación (fig. 4.38, *a*) es un *grafo lineal* (fig. 4.38, *b*), cuyos arcos están ponderados por las termas primarias o unidades correspondientes a los diodos de desacoplo. El grafo lineal se obtiene al sustituir los vértices del grafo estructural H por los arcos con los mismos pesos conservando los caminos de partida.

En las bases de la cuarta clase topológica, durante la transformación $H \rightarrow S$ pueden aparecer los caminos excedentes no solamente en virtud de la conductividad bilateral de los canales de conexión, sino como resultado de la conductividad bilateral de los elementos. En este caso, los caminos excedentes surgen, si el grafo estructural contiene el subgrafo Q_H, homeomorfo al subgrafo Q_B. Por consiguiente, en las bases de esta clase, la figura prohibida complementaria de la conversión $H \rightarrow S$ es el subgrafo Q_H. Para eliminar los caminos excedentes provocadas por la conductividad bilateral de los propios elementos, uno de éstos que está en la diagonal de la figura prohibida, se orienta conectándole en serie el diodo de desacoplo.

En las bases de la clase considerada, la conversión $H \rightarrow S$ se realiza (igual que en las bases de la primera clase) orientando las aristas diagonales en las figuras prohibidas Q_B, Q_H.

En las bases de la cuarta clase topológica, en la transformación $H \rightarrow S$ la abstracción de esquemas de conmutación es un grafo lineal, cuyas aristas están ponderadas por las termas primarias o unidades correspondientes a los diodos de desacoplo que se obtienen al sustituir los vértices del grafo estructural H por las aristas con los mismos pesos conservando caminos de partida.

En las bases de la primera y la tercera clase topológica, la complejidad de los esquemas de conmutación es igual a la complejidad del grafo estructural. En la segunda clase topológica se agrega a esta complejidad el número de diodos de desacoplo determinado por la distribución de los subgrafos Q_B. En la cuarta clase, la complejidad de los esquemas es igual a la complejidad del grafo estructural correspondiente más el número de diodos de desacoplo determinado por la distribución de las figuras Q_B y Q_H menos el número de circuitos de longitud 2, con la particularidad de que las aristas de cada uno están ponderadas por la misma terma primaria. Cada uno de estos circuitos se sustituye por un elemento de conmutación de conductividad bilateral.

De este modo, contando solamente los elementos de conmutación, en las bases topológicas la complejidad de los esquemas lógicos es igual a la complejidad del correspondiente grafo estructural H. En las bases funcionales, el grafo estructural $H(f)$ que determina la función booleana en realización se transforma en un esquema lógico por medio de la coálgebra de los grafos.

Para describir el funcionamiento del dispositivo automático en tiempo utilizando funciones booleanas, pongamos que todas las señales que llegan puedan cambiarse en tiempo solamente de modo discreto. Al elegir intervalos suficientemente cortos de tiempo consideremos que la señal cambia solamente en la frontera de los intervalos de tiempo y no cambia dentro del intervalo.

Escogemos la duración del intervalo, partiendo de los siguientes razonamientos. Desarrollemos una *serie booleana en tiempo* $x(t)$ en la suma *de patrones de función* de la forma

$$x(t) = \bigvee_i \alpha_i a_i(t).$$

Los patrones de función más simples a_0, a_1, a_2, . . . se dan en la fig. 4.39 donde T_0 es el tiempo del análisis de funcionamiento del dispositivo automático; con ello,

$$T_i = T_0/2^i, \tag{4.17}$$

donde T_i es el periodo del patrón de función a_i. Según (4.7) la duración del intervalo minimal

$$T_k = T_0/2^{\gamma+1},$$

donde γ es la *profundidad de cuantificación en tiempo.*

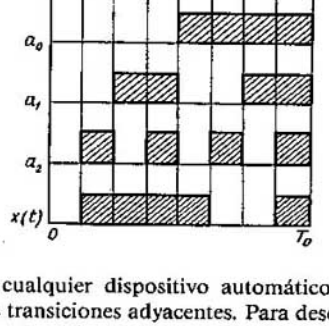


Fig. 4.39

Para cualquier dispositivo automático existe el tiempo mínimo $T_{\text{mín}}$ entre dos transiciones adyacentes. Para describir el funcionamiento del dispositivo automático en tiempo con el grado suficiente de exactitud, es necesario que

$$T_{\min} \geqslant T_k \text{ o } \gamma \geqslant \log_2 \frac{T_0}{T_{\text{mín}}} \tag{4.18}$$

Así, pues, para la representación analítica de las series booleanas en tiempo con el grado dado de exactitud, es necesario tener la profundidad de cuantificación en tiempo $\gamma \geqslant \log_2 (T_0/T_{\text{mín}})$.

Un intervalo temporal mínimo T_k se denominará *cuanto en tiempo*. Entonces, a cada cuanto le corresponde una constituyente de la unidad de una función booleana temporal $\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\gamma)$ cuyas variables son patrones de función $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\gamma$. Por consiguiente, cualquier serie booleana en tiempo con el grado dado de exactitud puede representarse como una función booleana de $a_0, a_1, \ldots, a_\gamma$ y utilizarse como una función booleana habitual. Por ejemplo, la serie booleana en tiempo $x(t)$ (fig. 4.39) puede representarse en la forma

$$x(t) = \bar{a}_0(a_1 \vee a_2) \vee a_0(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \vee a_1 a_2).$$

Cada elemento real que integra el esquema lógico que se sintetiza posee una constante de tiempo. Por lo tanto, en los esquemas lógicos prácticos tienen lugar *procesos transitorios* que debemos tener en cuenta. Examinemos el empleo del concepto de la derivada para investigar los procesos transitorios en esquemas.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x(t) \oplus x(t \mp 1), \tag{4.19}$$

se llama *derivada en tiempo* $\frac{\partial x}{\partial t}$ de una variable booleana $x(t)$; $x(t)$ es una sucesión booleana en tiempo que toma los valores 0, 1 en los momentos de tiempo 0, 1, 2, . . . Para más presición, en (4.19) tomemos el signo « – ».

La derivada en tiempo muestra la variación de la señal en tiempo. Examinaremos las series booleanas periódicas.

Ilustremos el concepto de la derivada temporal en el siguiente ejemplo. Si la variable $x(t)$ en tiempo $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ cambia respectivamente así: $x(t) = 0, 1, 0, 1, 1, 1$, la derivada temporal cambia como $\frac{\partial x}{\partial t} = 1, 1, 1, 1, 0, 0$.

Consideremos un esquema lógico de dos entradas que se conmutan simultáneamente. Para más precisión examinaremos la transición $(0, 0) \rightarrow (1, 1)$. La condición de conmutación simultánea de los canales de entrada x_1 y x_2 es ideal. En realidad, con la probabilidad casi igual a la unidad, cambia, primero, una entrada y, dentro de un rato otra. En dependencia del orden de su conmutación, el camino de (0, 0) a (1, 1) puede pasar a través de (1, 0) ó (0, 1). Analicemos dos casos:

1. Las funciones $f(0, 0)$ y $f(1, 1)$ no son iguales. La señal de salida antes y después de la conversión es diferente. Entonces, en los estados intermedios puede tener lugar ora el valor «viejo» de la señal, ora el «nuevo». Si en el esquema faltan picos, en principio no puede haber ninguna señal falsa.

2. Las funciones $f(0, 0)$ y $f(1, 1)$ son iguales. La señal de salida antes y después de la conversión es igual, es decir, en la salida la conversión «no se siente». Pero, si en los estados intermedios la señal de salida se difiere de $f(0, 0)$ ($f(1, 1)$), durante la conmutación puede aparecer una señal falsa, la conversión es crítica. Este fenómeno se denominará *riesgo* en el esquema lógico. El camino, por el cual la señal pasará del estado (0, 0) al (1, 1), depende de los parámetros físicos de las señales del esquema y de la suerte, ya que los parámetros tienen carácter estadístico.

Siguiendo a Bochmann, pongamos las condiciones necesarias y suficientes de la conversión crítica. Para que la conversión del estado (σ_1, σ_2) en el $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ $(\sigma_1, \sigma_2 = 0, 1)$ sea crítica es necesario y suficiente que

a) $f(\sigma_1, \sigma_2) = f(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$;

b) $f(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) \neq f(\sigma_1, \sigma_2)$ o $f(\sigma_1, \bar{\sigma}_2) \neq f(\sigma_1, \sigma_2)$.

Es fácil enunciar estas condiciones empleando las derivadas. En caso de la conversión crítica tenemos:

a) la conmutación simultánea de ambas entradas: $\frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial x_2}{\partial t} = 1$;

b) el valor de la señal de salida antes y después de la conversión es igual a: $\frac{\partial^2 f}{\partial (x_1 x_2)} = 0$;

c) la conmutación solamente de una entrada lleva a la conmutación de la salida: $\frac{\partial f}{\partial x_1} \vee \frac{f}{\partial x_2} = 1$.

Por lo tanto, el error se expresa del modo siguiente:

$$\Delta f = \frac{\partial x_1}{\partial t}\,\frac{\partial x_2}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \vee \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial (x_2 x_1)}} \tag{4.20}$$

donde Δf es la *función* del error.

En la expresión (4.20), la conjunción $\frac{\partial x_1}{\partial t}\,\frac{\partial x_2}{\partial t}$ determina las propiedades de la señal, a continuación la denominaremos *miembro de señal.* La conjunción $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \vee \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial (x_1 x_2)}$ determina las propiedades de la función que se realiza; en adelante la denominaremos miembro *funcional* de la fórmula que define el error.

Uno de los procedimientos para aumentar el rendimiento del ordenador es el incremento de la frecuencia de trabajo de los elementos utilizados. Los elementos electrónicos moleculares modernos tienen frecuencia de trabajo de miles megahertzios. Durante el funcionamiento de los esquemas lógicos, el retardo en el circuito de los elementos se hace comparable con el periodo de trabajo del esquema, lo que lleva a la necesidad de tomar en consideración las señales falsas determinadas por la expresión (4.20).

El error no surge, si $\Delta f = 0$, para lo cual es necesario hacer restricciones en el miembro de señal o en el funcional de la fórmula.

Examinemos el caso de los esquemas lógicos, en los cuales tres canales de entrada se conmutan simultáneamente. Según (4.20) el error tiene lugar cuando se conmutan dos entradas arbitrarias. Por consiguiente, en la conmutación de tres entradas x_a, x_b, x_c la función de error contiene los siguientes miembros:

$$\frac{\partial x_a}{\partial t}\,\frac{\partial x_b}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_a} \vee \frac{\partial f}{\partial x_b}\right)\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial (x_a x_b)}}\;;$$

$$\frac{\partial x_a}{\partial t}\,\frac{\partial x_c}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_a} \vee \frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial (x_a x_c)}\;;$$

$$\frac{\partial x_b}{\partial t}\,\frac{\partial x_c}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_b} \vee \frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial (x_b x_c)}}\;.$$

La fórmula que determina las condiciones en que surgen los errores al conmutar tres entradas, contiene otro miembro que tiene en cuenta la conmutación simultánea de tres entradas:

$$\frac{\partial x_a}{\partial t}\,\frac{\partial x_b}{\partial t}\,\frac{\partial x_c}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (x_a x_b)} \vee \frac{\partial^2 f}{\partial (x_a x_c)} \vee \frac{\partial^2 f}{\partial (x_b x_c)}\right)\overline{\frac{\partial^3 f}{\partial (x_a x_b x_c)}}\;.$$

Por lo tanto, para la conmutación de tres entradas la función de error tiene forma:

$$\Delta f = \frac{\partial x_a}{\partial t}\,\frac{\partial x_b}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_a} \vee \frac{\partial f}{\partial x_b}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial (x_a x_b)} \vee$$

$$\vee \frac{\partial x_a}{\partial t}\frac{\partial x_c}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}\vee\frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a x_c)}}\vee$$
$$\vee \frac{\partial x_b}{\partial t}\frac{\partial x_c}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_b}\vee\frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial(x_b x_c)}}\vee$$
$$\vee \frac{\partial x_a}{\partial t}\frac{\partial x_b}{\partial t}\frac{\partial x_c}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial(x_a x_b)}\vee\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a x_c)}\vee\frac{\partial^2 f}{\partial(x_b x_c)}\right)\overline{\frac{\partial^3 f}{\partial(x_a x_b x_c)}}. \quad (4.21)$$

Designemos el miembro funcional de la función de error que integra una misma conjunción con $\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial t}\frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial t}\ldots\frac{\partial x_{\alpha^k}}{\partial t}$, como $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k})$. Entonces (4.21) puede escribirse en la forma

$$\Delta f = \frac{\partial x_a}{\partial t}\frac{\partial x_b}{\partial t}F(x_a, x_b)\vee\frac{\partial x_a}{\partial t}\frac{\partial x_c}{\partial t}F(x_a, x_c)\vee$$
$$\vee\frac{\partial x_b}{\partial t}\frac{\partial x_c}{\partial t}F(x_b, x_c)\vee\frac{\partial x_a}{\partial t}\frac{\partial x_b}{\partial t}\frac{\partial x_c}{\partial t}F(x_a, x_b, x_c).$$

Generalizando la función de error para el caso de conmutación de n entradas en el esquema lógico, obtenemos

$$F(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n}) = \left(\bigvee_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}=x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n};\\ i_1\neq i_2, \ldots, i_{n-2}\neq i_{n-1}}}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial(i_1; i_2, \ldots, i_{n-1})}\right)\times$$
$$\times\overline{\frac{\partial^n f}{\partial(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n})}} \quad (4.22)$$

y la función de error tiene forma

$$\Delta f = \bigvee\frac{\partial i_1}{\partial t}\frac{\partial i_2}{\partial t}F(i_1, i_2)\vee\bigvee\frac{\partial i_1}{\partial t}\frac{\partial i_2}{\partial t}\frac{\partial i_3}{\partial t}F(i_1, i_2, i_3)\vee\ldots\vee$$
$$\vee\frac{\partial x_{a_1}}{\partial t}\frac{\partial x_{a_2}}{\partial t}\ldots\frac{\partial x_{a_n}}{\partial t}F(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n}),\ i_1, i_2, \ldots =$$
$$= a_1, a_2, \ldots, a_n. \quad (4.23)$$

De la fórmula (4.23) se desprende que con el aumento del número de canales de entrada que se conmutan aumenta la probabilidad de la conversión crítica. A la conmutación de tres canales en la entrada del esquema, la probabilidad de riesgo no es menor del 75%. La función de error Δf es de carácter estadístico.

§ 4.8. Simulación de los sistemas de autómatas mediante las redes de Petri

Debido al empleo cada vez más amplio de los sistemas de cálculo paralelos y distribuidos adquieren especial actualidad las estructuras discretas que representan los procesos en paralelo. Como aparato para describir los siste-

mas complejos de los procesos en interacción se presentan los sistemas formales tipo *redes de Petri* que simulan las propiedades dinámicas de los sistemas.

El carácter formal de las redes de Petri tipo común se basa en el concepto del acopio que es cierta generalización del concepto del conjunto. Al igual que el conjunto, el *acopio* es un juego de los elementos, pero cualquier elemento puede incluirse en este acopio más de una vez. En otras palabras, la relación de inclusión que une los elementos y conjuntos se sustituye por una *función del número de ejemplares* del elemento en el acopio que se denota por medio de $\#(x, B)$ (se lee: «el número x en el acopio B»). El conjunto es un caso particular del acopio.

Muchos conceptos de la teoría de los conjuntos se distribuyen también en los acopios. Así, el *acopio vacío* es análogo al conjunto vacío. La *potencia de un acopio* es el número total de ejemplares de los elementos en el acopio. El acopio A se incluye en el acopio B (es un subacopio), si para cualquier x $\#(x, A) \leqslant \#(x, B)$. Empleando la función $\#$ es fácil determinar las *operaciones sobre los acopios*: para la *unión de los acopios* A y B $\#(x, A \cup B) = \max(\#(x, A), \#(x, B))$; para la *intersección de los acopios* A y B $\#(x, A \cap B) = \min(\#(x, A), \#(x, B))$; para la *suma de los acopios* A y B $\#(x, A + B) = \#(x, A) + \#(x, B)$; para la *diferencia de los acopios* A y B $\#(x, A - B) = \#(x, A) - \#(x, A \cap B)$. Si M es un conjunto, M^n es el conjunto de todos los acopios, construidos de los elementos M, tales que $\#(x, B) \leqslant n$, $B \in M^n$; M^∞ es el conjunto de todos los acopios construidos de los elementos M sin limitar el número de ejemplares del elemento en el acopio.

La *red de Petri* es una cuaterna $C = (P, T, I, O)$ donde P es un conjunto finito *de posiciones*, T es un conjunto finito *de transiciones*, $I: T \to P^\infty$ es la función de entrada que aplica las transiciones a los acopios de posiciones; $O: T \to P^\infty$ es la función de salida que aplica las transiciones a los acopios de posiciones. La red de Petri se representa gráficamente en forma de un grafo múltiple con los vértices de dos tipos: los círculos corresponden a las posiciones, las rayas, a las transiciones. Las funciones I y O se representan por arcos (fig. 4.40).

Las posiciones desde las cuales los arcos llevan a la transición t_j se denominan *de entrada* para t_j; de manera análoga, las posiciones a las cuales llevan los arcos desde la transición t_j se llaman *de salida* para t_j. El conjunto de las posiciones de entrada se denota mediante $I(t_j)$, de salida, por medio de $O(t_j)$. En la red de Petri representada en la fig. 4.40 se tiene $I(t_1) = \{p_1, p_1, p_1\}$, $O(t_1) = \{p_3, p_4, p_4\}$. Es cómodo generalizar las funciones I y O sobre la aplicación de las posiciones en los acopios de transiciones ($P \to T^\infty$), lo que permite designar los conjuntos de las transiciones de entrada y de salida de la posición p_i (que se determinan de modo análogo a los conjuntos de las posiciones de entrada y de salida de la transición) por medio de

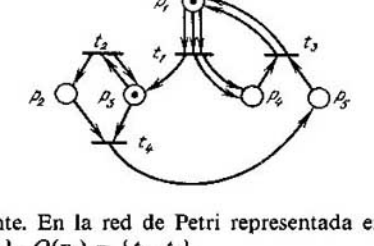


Fig. 4.40

$I(p_i)$ y $O(p_i)$, respectivamente. En la red de Petri representada en la fig. 4.40 se tiene $I(p_3) = \{t_1, t_2\}$, $O(p_3) = \{t_2, t_4\}$.

Los conceptos introducidos se refieren a la estructura estática de la red de Petri. Las propiedades dinámicas de esta red se determinan utilizando el concepto de la marcación. La *marcación* μ de la red de Petri $C = (P, T, I, O)$ es una función que aplica el conjunto de posiciones P en el conjunto de los números enteros no negativos N. La marcación se representa empleando *fichas* (puntos) que se colocan dentro de las posiciones. Así, la marcación de la red de Petri dada en la fig. 4.40 se determina como $\mu(p_1) = \mu(p_3) = 1$, $\mu(p_2) = \mu(p_4) = \mu(p_5) = 0$.

Es cómodo representar la marcación ora como un n-vector $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ (donde $n = |P|$), cada elemento del cual μ_i es $\mu(p_i)$, ora como un acopio μ que comprenda las posiciones de la red $p_i \in P$ y $\# (p_i, \mu) = \mu(p_i)$. La red de Petri C, con la marcación μ determinada en ella, se denomina red *marcada* de Petri.

El *arranque de transiciones* puede cambiar la marcación de la red. La transición t_j de una red marcada de Petri C con la marcación μ se denomina *permitida,* si $I(t_j) \subseteq \mu$, es decir, en cada posición de entrada p_j hay número de fichas que no es menor que el número de arcos salientes de esta posición en t_j. Se puede hacer arrancar cualquier transición permitida. Como resultado del *arranque* de la transición t_j la marcación μ de la red se sustituye por una nueva: $\mu' = \mu - I(t_j) + O(t_j)$, es decir, de cualesquiera posición de entrada p_i de una transición t_j se quitan tantas fichas, cuantos arcos conducen de p_i a t_j y en cada posición de salida p_k se colocan tantas fichas, cuantos arcos conducen de t_j a p_k. La sucesión de arranques de las transiciones se denomina *cumplimiento de la red de Petri.*

Examinemos el cumplimiento de la red de Petri mostrada en la fig. 4.40. En la *marcación inicial* se permite solamente la transición t_2. Durante su arranque la ficha se quita de p_3 y luego en cada una de las posiciones p_2 y p_3 se añade una ficha más, es decir, después del arranque en la marcación nueva μ' aparece también una ficha en p_2. Ahora las transiciones t_2, t_4 se hacen permitidas. Ya que se puede hacer arrancar cualesquiera transición permitida supongamos que tal es la transición t_4. Después de su arranque las fichas se quitan de las posiciones p_2 y p_3 y en la posición p_5 aparece una ficha. En la marcación obtenida μ'' ninguna transición es permitida. Así se termina el cumplimiento de la red de Petri.

Analicemos la marcación μ de la red de Petri $C = (P, T, I, O)$. La marcación μ' se denomina *directamente alcanzable* desde μ, si existe una transición $t_j \in T$, permitida en μ, tal que después de su arranque se obtiene la marcación μ'; en este caso el par (μ, μ') pertenece a la *relación de alcance directa* determinada sobre P^∞. La clausura transitiva de esta relación se denomina *relación de alcance*. Las marcaciones μ', tales que (μ, μ') pertenecen a la relación de alcance y se llaman *alcanzables* desde μ. El conjunto de marcaciones alcanzables desde μ de la red de Petri C se denomina *conjunto de alcance* y se denota mediante $R(C, \mu)$.

La interpretación de las redes de Petri se basa en los conceptos de *condición* y *suceso*. El estado del sistema se describe por una colección de condiciones. El funcionamiento del sistema consiste en realizar la sucesión de ciertas actuaciones, es decir, sucesos. Para que surja un suceso, es necesario cumplir unas condiciones llamadas *precondiciones*. El surgimiento del suceso puede infringir las precondiciones y cumplir otras llamadas *postcondiciones*. En la red de Petri las posiciones simulan las condiciones, las transiciones simulan los sucesos. Las precondiciones del suceso se representan por las posiciones de entrada de la correspondiente transición, las poscondiciones, por las posiciones de salida. El surgimiento del suceso se simula por el arranque de la transición. En las correspondientes posiciones, la presencia de fichas representa el cumplimiento de condiciones, su ausencia, el no cumplimiento.

Por ejemplo, analicemos un sistema simple de cálculo que procesa en serie los trabajos llegados a la cola de entrada. Si el procesor está libre y hay trabajo en la cola de entrada, éste se trata por el procesor y después sale. La red de Petri dada en la fig. 4.41 puede simular este sistema.

Establezcamos que particularidades de los sistemas tienen en cuenta las redes de Petri. En primer lugar, es la *asincronidad*. En la red de Petri no existe el concepto de tiempo. El tiempo de surgimiento de los sucesos no se indica de ningún modo. No obstante, la estructura de la red de Petri

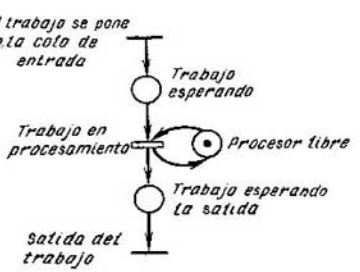


Fig. 4.41

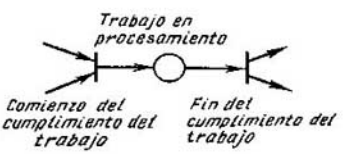


Fig. 4,42

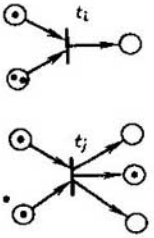


Fig. 4.43

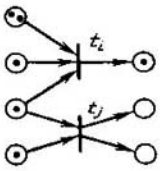


Fig. 4.44

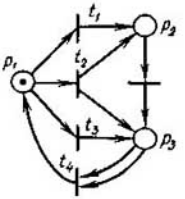


Fig. 4.45

establece el orden parcial de surgimiento de los sucesos. Es más, puesto que el surgimiento de los sucesos se representa por el aranque de transiciones, se supone que los sucesos transcurren *en un instante.* Si el suceso que se simula tiene una duración distinta de cero, por ejemplo, el suceso «trabajo en procesamiento» (fig. 4.41), y esto es sustancial, lo representamos en forma de dos sucesos instantáneos de tipo «comienzo del suceso», «fin del suceso» y la condición «suceso transcurriendo» (fig. 4.42). Además, se considera que los sucesos transcurren *no simultáneamente* (los sucesos instantáneos no pueden acontecer al mismo tiempo). En efecto, si admitimos el surgimiento simultáneo de algunos sucesos i y j, a los cuales en la red de Petri les corresponden las transiciones t_i y t_j, se puede introducir una transición complementaria t_{ij} con $I(t_{ij}) = I(t_i) + I(t_j)$, $O(t_{ij}) = O(t_i) + O(t_j)$ que se interpreta como el surgimiento simultáneo de los sucesos i y j. En este caso se puede hacer que las transiciones arranquen en serie.

Otra propiedad importante de las redes de Petri en calidad de instrumento de simulación es su capacidad de representar el *paralelismo* y *situaciones conflictivas.* El paralelismo de dos sucesos se representa por dos transiciones permitidas, cuyos conjuntos de posiciones de entrada no se intersecan (fig. 4.43), el conflicto se representa por las transiciones con una posición común de entrada (fig. 4.44).

En lo principal, las redes de Petri se utilizan como un aparato formal en la simulación de los sistemas de paralelismo inherente. Al examinar el proceso de proyección en total son posibles dos enfoques, distintos en principio, del empleo de las redes de Petri. En el primer caso, el sistema se simula por una red de Petri que se transforma, según las reglas determinadas, hasta llegar a un aspecto «óptimo». La red obtenida de Petri se transforma en un proyecto del sistema. Se supone que es también «óptimo». Aquí las redes de Petri se aplican directamente para proyectar. Empero, este enfoque tiene las dificultades vinculadas con la multiformidad de la transformación inversa, las redes de Petri en el proyecto del sistema, lo que pone en duda la optimicidad del proyecto que se obtiene. En el segundo

enfoque más conocido por todos primeramente se crea, empleando los medios habituales, el proyecto del sistema y, según éste, se construye un modelo en forma de la red de Petri. Después se investigan las propiedades de la red obtenida y se hacen deducciones sobre las propiedades y características del proyecto. Si no son satisfactorios, los datos obtenidos al investigar las redes de Petri se utilizan para modificar el proyecto. El proyecto modificado vuelve a transformarse en la red de Petri y el ciclo se repite. Este proceso se termina cuando la red de Petri posea las propiedades necesarias.

Examinemos que propiedades de las redes de Petri en calidad de modelo del sistema pueden interesar al diseñador. Una de las propiedades más importantes es la seguridad. La posición de la red de Petri se denomina *segura,* si en ésta el número de fichas nunca supera 1. La red marcada de Petri es *segura,* si todas sus posiciones son seguras. Esta propiedad es muy importante para interpretar las posiciones como condiciones simples: si en la posición hay una ficha, la condición se cumple, si no hay, no se cumple. Si la interpretación de fichas es más complicada (por ejemplo, el número de fichas indica el número de unidades informativas), puede tener interés la pregunta, si es limitado el número de fichas en la posición dada y, si lo es, cuáles son sus límites. De este modo, llegamos a la propiedad de limitación. La posición se denomina *k-limitada,* si en ésta el número de fichas no supera un k entero para cualquier marcación alcanzable. Una red marcada de Petri se denomina *k-limitada,* si sus posiciones son k-limitadas. En la red de Petri dada en la fig. 4.45 las posiciones p_1 y p_2 son seguras, la posición p_3 es 2-limitada y toda la red es 2-limitada.

En el caso de interpretar las fichas como unos recursos, éstas no deben crearse ni eliminarse. En otras palabras, en la red debe actuar la ley de conservación. Una red marcada de Petri se denomina *estrictamente conservante,* si la potencia de marcación (como de un acopio de posiciones) es constante. En caso general la ficha puede interpretarse como un número de recursos elementales con la particularidad de que este número se varía de una posición a otra. Introduzcamos el concepto de *ponderación de posiciones:* un vector $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, donde w_n es el peso de la posición p_i. Una red de Petri se denomina *conservante respecto al vector de ponderación* $\mathbf{W}$, si el producto escalar del vector $\mathbf{W}$ y la marcación (considerada como un vector) es constante; una red de Petri es *conservante,* si es conservante respecto al vector de ponderación $\mathbf{W}$, todos los elementos del cual son positivos.

Las propiedades consideradas hasta ahora se refieren tanto a los sistemas sucesivos como a los paralelos. Pero pasando de los sistemas en serie a los paralelos surgen nuevas dificultades en principio: la posibilidad de *situaciones tope.* Llámase *tope* en una red de Petri un conjunto de transiciones que no son permitidas en una marcación alcanzable μ' y las marca-

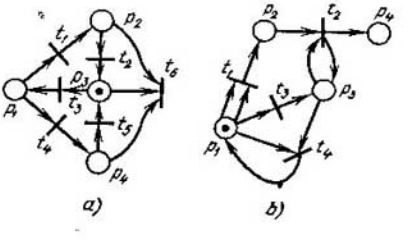


Fig. 4.46 *a)* *b)*

ciones posteriores alcanzables de μ'. La posibilidad de que surjan topes en el sistema se simula por la propiedad de actividad en las redes de Petri. Una transición t_j se denomina *activa,* si no interga ningún tope. La transición se llama *pasiva,* si no es permitida en ninguna marcación alcanzable. En la investigación detallada de la actividad de la red de Petri se usa también el concepto de niveles de actividad. La transición t_j posee la *actividad* del *nivel* 0, si no puede ser arrancada (es pasiva); del *nivel 1,* si potencialmente puede ser arrancada, o sea, si existe una marcación alcanzable, en la cual la transición es permitida; del *nivel 2,* si para cualquier k entero existe una sucesión de arranques de transiciones, en la cual esta transición está presente no menor que k veces; del *nivel 3,* si existe la sucesión infinita de arranques, en la cual esta trancisión está presenta con la frecuencia infinita; del *nivel 4,* si potencialmente puede arrancar de cualesquiera marcación alcanzable (o sea, es activa). En la red de Petri dada en la fig. 4.46, *a* la transición t_3 es activa, las t_1, t_2, t_4, t_5 tienen nivel de actividad 3, la t_6 es pasiva. En la red de Petri representada en la fig. 4.46, *b* la transición t_4 es pasiva, la t_3 posee la actividad del nivel 1, la t_2, la del nivel 2, la t_1, la del nivel 3.

Uno de los problemas más importantes en el análisis de las redes de Petri es el *problema de alcance*: ¿es alcanzable la marcación μ' de la marcación inicial μ para la red de Petri dada? La importancia de este problema se desprende de que la marcación sirve de interpretación del estado del sistema. La solución del problema de alcance permite determinar, si es alcanzable un estado determinado sea «bueno» o «malo» para el sistema.

Las propiedades descritas y los problemas correspondientes del análisis de las redes de Petri son los más comunes aunque no abarcan todo el conjunto de cuestiones que pueden surgir al analizar las redes de Petri. Hay dos procedimientos principales para resolver los problemas del análisis. El primero se basa en la construcción del árbol de alcance. Llámase *árbol de alcance* un árbol orientado con raíz, a los vértices del cual les corresponden las marcaciones posibles y a los arcos, las transiciones. Al vértice radical le corresponde la marcación inicial. De cada vértice salen los arcos correspondientes a las transiciones permitidas. La construcción del árbol

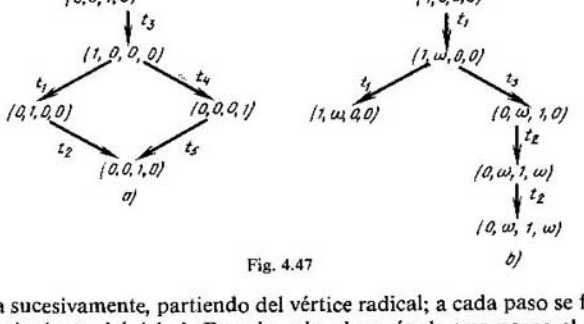


Fig. 4.47

se realiza sucesivamente, partiendo del vértice radical; a cada paso se forma un nivel siguiente del árbol. Por ejemplo, después de tres pasos el árbol de alcance para la red de Petri representada en la fig. 4.46, *a* tiene forma dada en la fig. 4.47, *a* (los vectores representan las marcaciones). Es obvio, que si construyendo un árbol no utilizamos acuerdos determinados, las redes activas (hasta limitadas) de Petri tendrán un árbol infinito de alcance.

Llamaremos *de frontera* los vértices (y las marcaciones respectivas) construidos a un paso siguiente del algoritmo. Si en una marcación de frontera no hay transiciones permitidas, la denominaremos *terminal*. Si un vértice de frontera tiene marcación ya existente en el árbol, la llamaremos *duplicadora*. Para los vértices terminales y duplicadores no construiremos los arcos salientes de ellos. Esto asegura el árbol finito de alcance para la red limitada de Petri (por ejemplo, fig. 4.46,*a* y 4.47,*a*). Para las redes ilimitadas hace falta designar de cualquier modo el número infinito de fichas en la posición. Sea que ω designa este número con tal que $\omega + a\ \omega$, $\omega - a = \omega$, $a < \omega$, $\omega \leqslant \omega$, donde a es un número positivo entero arbitrario. En la construcción del árbol de alcance usaremos la siguiente regla. Sea que un vértice de frontera μ no es terminal, ni duplicador. En la marcación μ para cada transición permitida t_j construyamos un arco saliente de μ y lo denotemos por la transición t_j. La marcación μ' del vértice nuevo se determina del siguiente modo. Si $\mu(p_i) = \omega$, $\mu'(p_i) = \omega$. Si, en el camino del vértice radical a μ, existe un vértice μ'', tal que después del arranque de la transición t_j en μ, el número de fichas en toda posición no es menor que en μ'' y en la posición p_i es estrictamente mayor, entonces $\mu'(p_i) = \omega$. En caso contrario $\mu'(p_i)$ es el número de fichas en la posición p_i que se obtiene después de que t_j arranque de μ (fig. 4.47, *b*).

Teorema 4.4. *El árbol de alcance de cualesquiera red de Petri es finita.*

La demostración de esta afirmación se basa en las propiedades ω y en las reglas de introducir este símbolo en la marcación de los vértices de frontera.

El método de análisis basado en el árbol de alcance permite determinar las propiedades de seguridad, limitación, conservación e investigar las propiedades de actividad y de alcance.

La red de Petri es limitada si, y sólo si, no hay símbolo ω en el árbol de alcance. Además, la posición del símbolo ω indica que posiciones son ilimitadas. Si el símbolo ω está ausente en el árbol, el número de marcaciones alcanzables es finito y todas las cuestiones del análisis pueden resolverse mediante el sondeo simple. En particular, para hallar la frontera de marcación de la posición dada p_i, hay que encontrar el valor máximo del i-ésimo componente entre todos los vértices del árbol. Si esta frontera no supera 1, la posición es segura.

Para establecer si la red de Petri es conservante respecto a un vector de ponderación $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con restricctiones:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \mu_j(p_i) = s, \text{ cuando } j = (1, \ldots, k), \\ w_i \geqslant 0, \text{ cuando } i = (1, \ldots, n), \end{cases}$$

donde k es el número de vértices del árbol de alcance, a los cuales corresponden distintas marcaciones. (Es evidente que si tenemos $\mu_j(p_i) = \omega$, $w_i = 0$.)

La posibilidad de resolver los problemas de actividad y de alcance está limitada por la existencia del símbolo ω que esconde la información concreta sobre el número de fichas. Por ejemplo, una vez instroducidos dos arcos (t_1, p_2), (p_2, t_2) en la red de Petri representada en la fig. 4.46, *b*, la red obtenida de Petri tendrá el mismo árbol de alcance que la inicial. Al mismo tiempo, en la nueva red de Petri, en la posición p_2, puede encontrarse solamente un número par de fichas, mientras que en la red inicial puede haber cualquier número de fichas, es decir, los conjuntos de alcance para estas redes de Petri no coinciden. Se puede aducir distintas redes con diferentes propiedades de actividad, pero deben tener un mismo árbol de alcance.

No obstante, aunque el árbol de alcance no presta la información completa sobre las propiedades de alcance y de actividad, en algunos casos permite responder a las preguntas sobre el alcance y la actividad. Por ejemplo, si tiene un vértice terminal, la red de Petri no es activa. Resolviendo el problema de alcance puede ocurrir que la marcación μ' está presente en el árbol de alcance (la respuesta positiva) o que la marcación μ' no se cubre por ningún vértice del árbol de alcance, es decir, $\mu'' \not\geqslant \mu$para todos los vértices μ'' (la respuesta negativa).

Otro enfoque del análisis de las redes de Petri se denomina *matricial* y se basa en su representación matricial. Introduzcamos las matrices D^- y D^+, a cyuas columnas les corresponden las posiciones, a las filas, las transiciones y $D^-(j, i) = \#(p_i, I(t_j))$, $D^+(j, i) = \#(p_i, O(t_j))$. Sea $e(j)$ un

vector-fila, cuyos componentes corresponden a las transiciones y todos son iguales a cero, excepto el j-ésimo que es igual a 1. Entonces la transición t_j está permitida, si $\mu \geqslant e(j)$. D^- (μ se examina como un vector) y el resultado del arranque de t_j desde μ es $\mu' = \mu - e(j)D^- + e(j)D^+ = \mu + e(j) \times \times (D^+ - D^-) = \mu + e(j) \cdot D$, donde $D = D^+ - D^-$ es una *matriz compuesta de cambios.*

La marcación μ' obtenida de μ como resultado del arranque de la sucesión $\sigma = t_{j1} t_{j2} \ldots t_{jk}$ se determina como

$$\mu' = \mu + e(j_1)D + e(j_2)D + \ldots + e(j_k)D =$$
$$= \mu + (e(j_1) + \ldots + e(j_k))D = \mu + f(\sigma)D,$$

donde $f(\sigma) = e(j_1) + \ldots + e(j_k)$ es el *vector de arranque,* cuyo j-ésimo componente es igual al número de arranques de t_{ji} en σ.

Si una red marcada de Petri es conservante respecto a un vector de ponderación $\mathbf{W}$($\mathbf{W}$ es vector-columna), se tiene $\mu W = \mu' W$ para cualquier $\mu' = R(C, \mu)$. Ya que $\mu' = \mu + f(\sigma)D$, entonces $f(\sigma)DW = 0$. Puesto que esto es válido para todos los $f(\sigma)$, tenemos $DW = 0$. Por lo tanto, la red de Petri es conservante respecto a un vector de ponderación si, y sólo si, existe un vector $\mathbf{W}$ tal que $DW = 0$. Esta ecuación permite hallar el vector de ponderación $\mathbf{W}$.

Si la marcación μ' es alcanzable de la marcación inicial μ de la red de Petri debe existir una solución entera no negativa de la ecuación $\mu' = \mu + xD$, cuya solución será $x = f(\sigma)$.

Investiguemos el problema de alcance para la red de Petri dada en la fig. 4.46, *b* con la marcación inicial (1, 0, 0, 0) para la marcación $\mu' = (0, 2, 1, 2)$. La ecuación $\mu' = \mu + xD$ toma la forma

$$(0, 2, 1, 2) = (1, 0, 0, 0) + x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y tiene solución $x = (4, 2, 1, 0)$ que corresponde a la sucesión de arranques de las transiciones $t_1 t_1 t_1 t_3 t_2 t_2$.

El enfoque matricial del análisis de las redes de Petri, igual que el enfoque basado en el árbol de alcance, en el caso general no permite resolver el problema de alcance y de actividad. Los problemas del análisis matricial consisten en que el vector de arranque obtenido durante la solución de la ecuación 1) no proporciona información sobre el orden de arranque de transiciones y 2) puede corresponder a la sucesión no permitida de arranques.

En el presente está demostrado que los problemas de alcance y de actividad son *equivalentes* pero no se conoce, si son resolubles en general, o sea, no existe el algoritmo que permite resolver estos problemas ni la demostración de su ausencia.

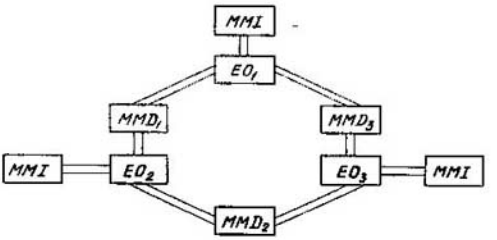


Fig. 4.48

Examinemos el uso de los métodos del análisis de las redes de Petri que simulan los sistemas prácticos.

Un sistema paralelo especializado para realizar los procesos iterativos de cálculo comprende una colección de elementos de procesor (EO) y de módulos de memoria (de memoria de datos (MMD) y de instrucciones (MMI) unidos en el anillo (fig. 4.48).El EO funciona en dos regímenes. En el primer caso ocupa los dos MMD adyacentes usando el izquierdo para sacar los dados de partida para nueva iteración y el derecho para elegir los resultados de la iteración anterior. Terminada la iteración, coloca el resultado en el MMD derecho y libra los dos MMD. En el otro régimen el EO funciona con los datos interiores. Una instrucción leída del MMI indica el régimen. Consideremos dos variantes para realizar unidades de mando del EO. En la primera variante, al realizar la iteración, el MMD se ocupa sucesivamente. El EO puede estar en los siguientes estados: «elaboración de los datos interiores» (S_1), «ocupado el MMD izquierdo» (S_2), «ocupado el MMD derecho» (S_3), «ocupados los dos MMD, elaboración de los datos de la iteración siguiente» (S_4). El MMD puede estar ora libre, ora ocupado. Consideremos la ocupación y la liberación del MMD como sucesos. Esta variante del funcionamiento se representa mediante la red de Petri, en la cual a cada EO le corresponden cuatro posiciones que realizan las condiciones descritas, y a cada MMD le corresponde una posición (en la cual la ficha significa que el MMD está libre) (fig. 4.49). Se puede cerciorarse

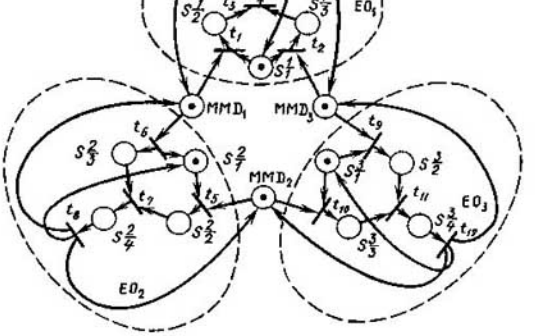


Fig. 4.49

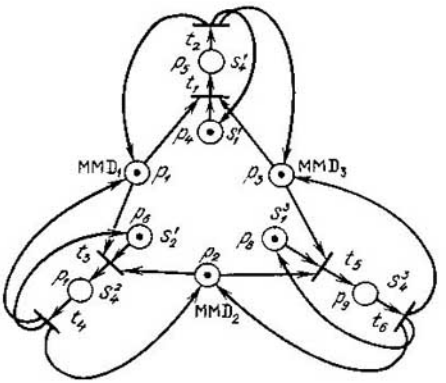


Fig. 4.50

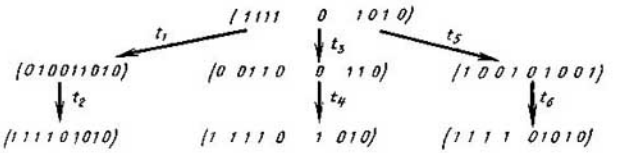


Fig. 4.51

que el árbol de alcance de esta red de Petri contiene dos marcaciones terminales: $\mu_1 = (S_2^1, S_2^2, S_3^2)$ y $\mu_2 = (S_3^1, S_3^2, S_3^3)$ que representan las situaciones de ocupar los MMD izquierdo y derecho por todo EO, respectivamente. Esto significa que la red de Petri no es activa, o sea, en el sistema, las situaciones tope son posibles.

En otra variante del funcionamiento del sistema del EO se realiza solamente la ocupación simultánea de los MMD adyacentes (si es posible). En este caso a todo EO le corresponden solamente las condiciones S_1 y S_4 (fig. 4.50). El árbol de alcance (fig. 4.51) no contiene marcaciones terminales, la red de Petri es activa. Además, de la consideración del árbol de alcance se desprende obviamente que la red de Petri es segura (las posiciones se interpretan como las condiciones simples). En el sistema se distribuyen los recursos que no aparecen ni desaparecen, es decir, se cumple la ley de conservación. Determinemos si la red de Petri es conservante. Para esto resolvamos la ecuación $DW = 0$ que toma la forma

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = 0$$

Su resolución es $W = (1, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 3)$. En efecto, las posiciones p_5, p_7, p_9 son las condiciones vinculadas con tres dispositivos, las demás posiciones son condiciones vinculadas con un dispositivo. De este modo, la red de Petri posee las necesarias propiedades principales, lo que asegura la capacidad de trabajo de la segunda variante.

Las pruebas de simular sistemas reales condujeron a distintas definiciones más completas y modificaciones de las redes de Petri. En lo principal, estas modificaciones están ligadas con el cambio de la regla de arranque de transiciones.

La *potencia de simulación* de las redes habituales de Petri está limitada por la imposibilidad de probar las posiciones para el cero (o sea, de si la marcación de la posición es nula). Uno de los procedimientos para superar esta deficiencia es introducir *arcos retenedores*. Según las nuevas reglas de arranque, la transición está permitida, si las fichas están presentes en sus posiciones habituales de entrada (de las cuales salen los arcos habituales) y ausentes en las posiciones retenedoras de entrada (de las cuales salen los arcos retenedores). El arco retenedor se refleja como el habitual pero en su extremo tiene un círculo pequeño en vez de la flecha (esta designación ha sido adoptada de la teoría de los esquemas conmutadores donde el círculo significa «no») (fig. 4.52). En las redes habituales de Petri la transición arranca según la *lógica Y*, en las *redes de Petri con arcos retenedores* la lógica se extiende incluyendo las negaciones. Ya que se puede representar el suceso mediante unas transiciones se puede simular un suceso, cuya precondición se escribe como la unión de unas conjunciones de condiciones y las negaciones de condiciones que corresponden a las posiciones de la red de Petri con arcos retenedores. Por lo tanto, las redes de Petri permiten simular las precondiciones en forma de la FND, es decir, las condiciones de la forma más general.

El problema examinado de organizar el funcionamiento del sistema especializado de cálculo puede ser resuelto también por medio de la primera variante, en la cual se permite la ocupación sucesiva del MMD (véase la fig. 4.49) pero previniendo situaciones tope. Es obvio, que son posibles dos situaciones tope descritas mediante las marcaciones con fichas en las posiciones S_2^1, S_2^2, S_2^3 y S_3^1, S_3^2, S_3^3 (véase la fig. 4.49). Para evitar la primera situación tope, en las marcaciones $\{S_2^1, S_2^2\}$, $\{S_2^1, S_2^3\}$, $\{S_2^2, S_2^3\}$ es necesario evitar que aparezca la ficha

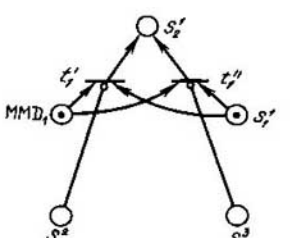


Fig. 4.52

en las posiciones S_2^3, S_2^2, S_2^1, respectivamente. Por lo tanto, la transición t_4 debe tener en calidad de precondición la conjunción $MMD_1\&S_2^1\&(S_2^1\&S_2^2)$, es decir, hace falta sustituirla por las transiciones t_4' y t_4'' con precondiciones $MMD_1\&\overline{S_2^1}\&S_2^1$ y $MMD_1\&S_2^1\&\overline{S_2^2}$ (fig. 4.52). Hay que tratar de modo análogo las transiciones t_5, t_9 (véase la fig. 4.49). Semejantes pasos se emprenden para evitar la segunda situación tope.

Otras proposiciones para cambiar las reglas de arranque o bien son equivalentes a la introducción de arcos retenedores o bien tienen carácter más particular. Por ejemplo, en las redes de Petri con campos de restricción se tienen conjuntos de posiciones (llamados campos de restricción), en las cuales las fichas no pueden encontrarse simultáneamente. Las reglas de arranque están modificadas de tal modo que no interrumpan esta condición. Si en la red de Petri dada en la fig. 4.49 incluimos dos campos de restricción $\{S_2^1, S_2^2, S_2^3\}$ y $\{S_3^1, S_3^2, S_3^3\}$, se puede evitar el surgimiento de las situaciones tope.

§ 4.9. Problemas y ejercicios

4.1. Formar una tabla funcional de la máquina de Turing cuando se suman 1 y el número escrito en el sistema ternario.

4.2. En la cinta está escrito un número en el sistema de numeración de la base Q. Formar las tablas funcionales, empleando las cuales se puede escribir el número; a) que sigue inmediatamente al dado; b) que precede inmediatamente al dado.

4.3. En la cinta está escrito un número x en el sistema ternario. Formar la tabla funcional, empleando la cual en la cinta se escribe $2x$ si x se divide por 3 sin resto y $x - 1$ en el caso contrario.

4.4. Escribir los números 704, 21, –77 en los sistemas de numeración con las bases $s = 3$, 7, 11. El conjunto de cifras es simétrico.

4.5. Escribir los números 0, 6; –56, 1 en los sistemas de numeración con las bases $s = 5$, 7. El conjunto de cifras es simétrico, el número de órdenes que se toma después de la coma es igual a tres para los dos sistemas.

4.6. Escribir los números 39, 88 y –101 en los sistemas de numeración con las bases $s = 4$, 8, 12. El conjunto de cifras es asimétrico en la dirección positiva.

4.7. Escribir los números 88, 41 en el sistema de numeración con la base 6 y con las cifras 1, 0, i, 2, 3, 4.

4.8. Escribir el número –0,77 en el sistema de numeración con la base 10 y las cifras –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tomar el número de órdenes después de la coma igual a cuatro.

4.9. En el sistema de numeración con la base 5 está escrito el número 22001. Hallar su equivalente decimal. ¿A qué número corresponderá este mismo código, si el sistema de numeración es nonario?

4.10. Establecer en qué sistema de numeración se realizó la siguiente actuación $(23 - 5) + (1 - 642) = 42\,423$. Se desconocen las cifras sustituidas por guiones.

4.11. Escribir los números 71, –16 y 203 en el sistema de numeración con la base –2. ¿A qué es igual el equivalente decimal del código obtenido, si lo consideramos como la notación en el sistema binario? El conjunto de cifras es natural.

4.12. Demostrar el siguiente teorema: en el sistema de numeración con la base natural, el conjunto natural de cifras permite codificar unívocamente cualquier equivalente cuantitativo.

4.13. Argumentar las reglas de traslación de números enteros y fraccionarios del sistema con la base natural R al sistema con la base natural Q.

4.14. Establecer las reglas de trasladar los números del sistema decimal de numeración al sistema de numeración con la base 2 y el conjunto natural de cifras.

4.15. Establecer las reglas de trasladar las denotaciones del sistema de numeración con la base -3 y el conjunto natural de cifras al sistema de numeración con la base 3 y el mismo conjunto de cifras.

4.16. Determinar cómo cambia la denotación del número al pasar del sistema con $S = 3$ y el conjunto simétrico de cifras al sistema con $S = -3$ y el mismo conjunto de cifras.

4.17. Establecer las reglas de trasladar del sistema de numeración con la base 2 y las cifras 0, 1 al sistema de numeración con la base 4 y el conjunto asimétrico de cifras desplazado a la dirección negativa.

4.18. Escribir el número 61 en el sistema de numeración con la base 0,25. Establecer la relación entre la denotación de los números en este sistema y en el sistema cuaternario con las cifras 0, 1, 2, 3.

4.19. Para el sistema de numeración con la base 0,125, hallar el conjunto de cifras que asegura la representación unívoca de cualquier número.

4.20. Escribir los números 60, -15, -607 en el código complementario en el sistema de numeración con la base 5 y el conjunto natural de cifras.

4.21. Escribir el cero en el código complementario en el sistema de numeración con la base 6 y el conjunto natural de cifras.

4.22. Escribir los números 55, -70, 118 en el código inverso en el sistema de numeración con la base 7 y el conjunto natural de cifras.

4.23. Escribir el cero en el código inverso en el sistema de numeración con $s = 11$ y el conjunto natural de cifras.

4.24. Escribir el número -65 en el código complementario en el sistema de numeración con $s = 4$ y las cifras $+3$, -2, -1, 0.

4.25. Establecer la relación entre los códigos complementario e inverso de un número x en el sistema con la base natural S y el conjunto natural de cifras.

4.26. Escribir los siguientes números: 75,5, $-0,25$; 0,125; -1000 en la forma semilogarítmica en el sistema binario de numeración con las cifras 0, 1. Según la condición la mantisa debe ser normalizada.

4.27. Establecer para que números x (no se supone que x es menor que el uno) el código complementario de estos números coincide con la denotación del propio número. Resolver el problema análogo para el código inverso (por supuesto, $x < 0$).

4.28. Trasladar el código complementario 6.1124 en la denotación habitual. Resolver el problema análogo para el código inverso 7,770045.

4.29. Hallar la suma de dos números 0,1101 y 0,0010 en el sistema binario con las cifras 0, 1 construyendo de antemano las reglas de adición en un orden. Los órdenes de los números son iguales.

4.30. Hallar el producto de los números 0,3302 y 0,1102 en el sistema cuaternario con el conjunto natural de cifras. Construir con anticipación la tabla de multiplicación para este sistema.

4.31. Hallar la suma y el producto de los números 0,210DD0 y 0,000009 en el sistema de numeración con $S = 11$ y el conjunto natural de cifras: $\{0, 1, 2, \ldots, 9, D\}$, donde el equivalente cuantitativo de la cifra D es igual a 10. La denotación convencional de la cifra con el equivalente cuantitativo 10 es D. Construir con anticipación las tablas de adición y multiplicación en el sistema undecimal de numeración.

4.32. Empleando el código complementario, hallar la suma de los números 0,1101 y $-0,10000$ en el sistema binario con las cifras 0, 1. Trasladar el resultado de sumación a la denotación habitual.

4.33. Empleando el código inverso, hallar la suma de los números 0,2210 y $+0,1122$ en el sistema ternario con las cifras 0, 1, 2. Trasladar el resultado a la denotación habitual.

4.34. Hallar la suma de los números $-0,0011$ y 0,1001 en el código inverso en el sistema binario de numeración con las cifras 0, 1.

4.35. Hallar la suma de los números 0,00065 y −0,01125 en el código complementario en el sistema septenario de numeración.

4.36. Hallar el producto de los números $3^1 \cdot 0{,}201$ y $-3^5 \cdot 0{,}102$ en el sistema ternario de numeración con las cifras 0, 1, 2. Trasladar el resultado a la denotación habitual.

4.37. Hallar la suma de los números $-7^{-1} + 0{,}11066$ y $-7^0 + 0{,}11055$ en el código complementario en el sistema de numeración con $S = 7$ y el conjunto natural de cifras. Normalizar el resultado.

4.38. Hallar la suma de los números binarios $-2^1 \cdot 0{,}1001$ y $2^0 \cdot 0{,}1102$ en el código inverso en el sistema con las cifras 0, 1. Normalizar el resultado.

4.39. Hallar el cociente para los números 0,0111 y 0,1100 limitándose con cuatro cifras del cociente. Trasladar el resultado a la denotación decimal.

4.40. Hallar cuatro cifras del cociente para los números 0,0442 y −0,4343 en el sistema de numeración con la base 9 y el conjunto natural de cifras. Trasladar el resultado a la denotación decimal.

4.41. Hallar el cociente de la división de $4 \cdot 0{,}1101$ por $4^2 \cdot 0{,}3301$. Buscando la mantisa del cociente, calcular cinco cifras. Trasladar el resultado a la denotación binaria con las cifras 0, 1.

4.42. Hallar el cociente de la división de $2^1 \cdot 0{,}1101$ por $-2^5 \cdot 0{,}1001$. El resultado de la división de la mantisas debe contener cinco órdenes y ser normalizado.

4.43. Determinar las reglas de adición y multiplicación para un orden en el sistema ternario con el conjunto simétrico de cifras. Empleando las reglas obtenidas, hallar la suma y el producto de los números $0{,}1\bar{1}0\bar{1}$ y $0{,}110\bar{1}$. En esta denotación $\bar{1}$ corresponde a la cifra −1.

4.44. Establecer las reglas de adición y multiplicación en el sistema de numeración con la base 6 y el conjunto asimétrico de cifras desplazado a la dirección negativa. Hallar la suma y el producto de los números $-0{,}301\bar{2}$ y $0{,}\bar{1}102$. La raya sobre la cifra significa que la última es negativa.

4.45. Determinar las reglas de adición en el sistema binario de numeración con las cifras −1, 0, 1. Hallar la suma de los números $0{,}1101\bar{1}$ y $0{,}1\bar{1}\bar{1}01$.

4.46. ¿Con cuántos procedimientos se puede codificar diez cifras decimales mediante las tétradas binarias?

4.47. ¿Con cuántos procedimientos se puede realizar la codificación del problema anterior, si, además, exigimos la correspondencia biunívoca entre las cifras y las tétradas?

4.48. Hallar la suma de los números 5764 y 2433 en el código del desplazamiento directo y en el código por exceso de 3.

4.49. Hallar la suma de los números −79 y −981 en el código por exceso de 3.

4.50. Establecer las reglas de adición en el código por exceso de 6. Empleándolas adicionar los números 203 y 479.

4.51. Demostrar la afirmación: si en la codificación bidecimal todos los pesos p_i son no negativos, entonces son estrictamente positivos.

4.52. Demostrar que el único código perfecto es el código con los pesos 2 4 2 1.

4.53. Demostrar la afirmación: si en el código de valor ponderado existen dos pesos iguales, su suma no supera 9 (se supone que los pesos son positivos).

4.54. Demostrar la afirmación: el código de pesos positivos no puede tener peso mayor que 8.

4.55. Establecer las reglas de adición y multiplicación para el código por exceso de 5. Determinar la suma y el producto de los números 87 y 56.

4.56. Escribir las tablas de códigos por exceso de 1 a 15. Cerciorarse que solamente los códigos por exceso de menor que 7 satisfacen las exigencias de unicidad, paridad y ordenación y, además, sólo el código por exceso de 3 satisface la complementaridad.

4.57. Establecer las reglas de adición y multiplicación para el código de Aiken Emeriax (el código con los pesos 2 4 2 1). Empleando estas reglas, hallar la suma y el producto de los números −401 y 587.

4.58. Establecer las reglas de adición para el código 2521 (es decir, para el código con los pesos 2 5 2 1). Hallar la suma de los números 90 y 73.

4.59. Determinar las reglas de adición para el código 3321 y hallar la suma de los números 601 y −670.

4.60. En el sistema de los módulos $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, cierto número tiene código en restos tipo 010. Determinar este número.

4.61. En el sistema de los módulos $q_1 = 7$, $q_2 = 8$, se dan los números x e y por medio de sus códigos en restos 31 y 03. Establecer qué número es mayor, x o y.

4.62. Escribir el algoritmo de traslación de los códigos en restos a la denotación decimal del número.

4.63. Hallar un procedimiento para determinar el signo del número en el código en restos.

4.64. Hallar un procedimiento para comparar los números por el valor en el código en restos.

4.65. Establecer las reglas de división para el código en restos.

4.66. Sintetizar un esquema criotrónico que realiza la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid_3 = \vee(1, 3, 7, 8, 9, 10, 12, 15)$.

4.67. ¿Cómo se tiene en cuenta el coeficiente de ramificación que se determina por la capacidad de carga del elemento básico dado cuando se utiliza la coálgebra de grafos K?

4.68. Comparar las complejidades de los contadores de paridad de tres variables en las bases de Webb y de Sheffer.

4.69. Comparar la complejidad del contador de paridad de tres variables en la base de Sheffer construido según el método de simulación de cópulas del álgebra de Boole y según el método que se basa en la aplicación de la coálgebra de los grafos K.

4.70. Determinar la derivada temporal de la función booleana $x(t)$ dada en la tabla 4.9.

Tabla 4.9

t	0	1	2	3	4	5	6
$x(t)$	1	1	0	1	0	1	1

4.71. Hallar la función de error Δf en la salida de un semisumador completo, si el primer sumando $x_1(t)$, el segundo $x_2(t)$ y el traslado $p(t)$ del orden anterior se determinan según la tabla 4.10.

4.72. Hallar la función de error Δf a las salidas del descifrador de cuatro salidas, si a su primera entrada llega la sucesión booleana temporal $x(t)$ prefijada según la tabla 4.11, *a* y a su segunda entrada, la función $y(t)$ prefijada según la tabla 4.11, *b*.

Tabla 4.10

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(t)$	0	1	1	1	0	0	1	0
$x_2(t)$	1	1	0	1	1	0	0	1
$p(t)$	0	0	1	0	1	1	1	0

Tabla 4.11, a

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(t)$	1	1	1	0	0	1	0	1

Tabla 4.11, b

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(t)$	1	0	0	1	1	0	0	0

4.73. Determinar la función de error a la salida del contador de imparidad que tiene tres entradas x_1, x_2, x_3, a las cuales llegan las sucesiones booleanas temporales periódicas prefijadas en la tabla 4.12.

Tabla 4.12

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(t)$	1	1	0	0	1	0	1	0
$x_2(t)$	0	0	0	0	1	1	0	1
$x_3(t)$	1	0	1	0	1	1	0	1

Comentarios

Crear los sistemas de automatización de diseño, de producción automatizada flexible, las redes locales de cálculo, los sistemas intelectuales de conocimiento y resolver otros problemas es imposible sin la formalización, cuya base constituye la teoría de las gramáticas formales y de los dispositivos automáticos. En el desarrollo de esta teoría un gran aporte pertenece a los científicos soviéticos V.M. Glushkov, M.A. Gavrílov, V.A. Gorbátov, A.V. Kaliáev, V.G. Lázarev, P.P. Parjómenko, D.A. Pospélov, V.P. Chistov, E.A. Yakubaitis y otros.

Para los conocimientos más detallados de las gramáticas formales y los dispositivos automáticos se recomienda la literatura adicional indicada en el apartado de Bibliografía.

De la percepción viva al pensamiento abstracto, *de éste a la práctica*: tal es el camino dialéctico del conocimiento de la *verdad*, del conocimiento de la realidad objetiva.

V. I. Lenin

CAPÍTULO 5
Teoría aplicada de los algoritmos
Análisis de caracterización

§ 5.1. Principios del análisis de caracterización. Construcción de los algoritmos combinatorios

El rasgo característico de la revolución científico-técnica contemporáneo es el creciente papel de los cálculos de carácter combinatorio (de sondeo) en los problemas aplicados. El problema actual de la matemática discreta es la construcción de los algoritmos combinatorios, eficaces tanto por la capacidad de la memoria necesaria como por la acción rápida.

Se puede partir los problemas aplicados en los del análisis y los de la síntesis de los sistemas discretos. Por la resolución del problema del análisis se entiende la determinación del hecho que el modelo Ψ_a que representa el sistema discreto posee las propiedades demandadas. Resolviendo el problema de la síntesis, el modelo Ψ_a se transforma en el modelo Ψ_b para alcanzar el extremo de la funcional prefijada de calidad $\varphi(\Psi_b)$. En ambos casos se puede hablar sobre la equivalentización. En los problemas del análisis, según el modelo Ψ_a se construye su equivalente que revela las propiedades del modelo. En los problemas de la síntesis el modelo Ψ_a se hace equivalente al modelo Ψ_b que se sintetiza. Tanto el análisis como la síntesis se realizan empleando algoritmos combinatorios.

La clase primitiva de los algoritmos combinatorios la representan los FBI-algoritmos (FBI significa Fuerza Brutal e Ignorancia). Estos algoritmos no tienen ninguna «destreza», resuelven los problemas «a ciegas» realizando el sondeo completo de las transformaciones posibles. En este caso faltan las premisas teóricas, basándose en las cuales se podría proponer un algoritmo «refinado» de solución. En los algoritmos de esta clase se realiza la equivalentización sintáctica.

La equivalentización sintáctica llamada *transformación equivalente* corresponde al nivel de conocimientos para el cual se conoce el sistema completo de axiomas y que consiste en la construcción de la siguiente variante para los problemas del análisis y en la sustitución del modelo Ψ_a por Ψ_b para el problema de la síntesis basándose en uno u otro axioma o ley obtenida del sistema de axiomas. El árbol de soluciones para la equivalentización sintáctica está representado en la fig. 5.1, *a*.

Todo vértice pendiente del árbol corresponde a la resolución tope. Las propiedades típicas de este árbol son:

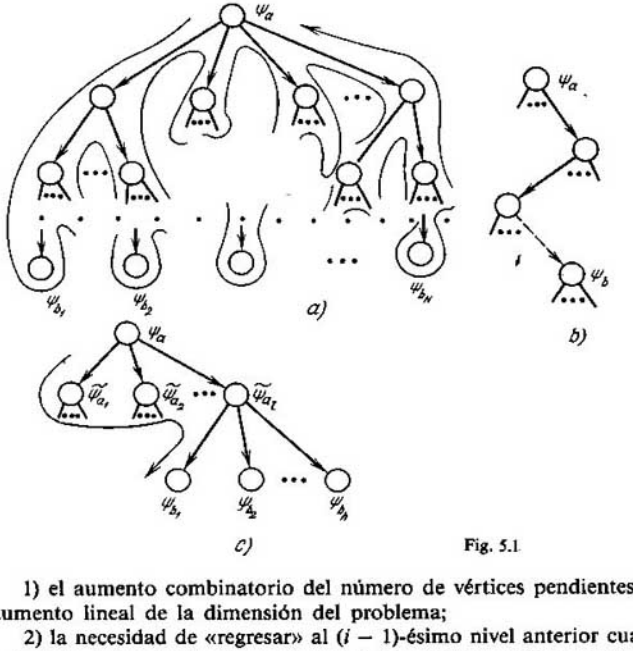


Fig. 5.1

1) el aumento combinatorio del número de vértices pendientes con el aumento lineal de la dimensión del problema;

2) la necesidad de «regresar» al $(i-1)$-ésimo nivel anterior cuando se calcula la información que corresponde al vértice «vecino» en el i-ésimo nivel. El corolario de esta propiedad es la necesidad principal de recorrer todo el árbol buscando la resolución mínima.

Estas propiedades determinan el fenómeno denominado la «maldición de la dimensión».

Durante la elaboración del apoyo matemático y de programas para los ordenadores, especialmente trabajando en escala concreta del tiempo, creando sistemas de automatización de proyección (el problema de SAPR), etc., lo actual es la proyección de paquetes de acción rápida de los programas aplicados. Para aumentar la rapidez de acción, se usan heurísticas en forma de correspondientes funcionales hallados en la base de experiencia, analogías y consideraciones sensatas. Como resultado se obtiene la clase de algoritmos heurísticos. Los algoritmos de esta clase realizan la equivalencia heurística, cuando la rapidez de acción del algoritmo incrementa, pero es imposible estimar la calidad de la solución obtenida; incluso no se puede decir si es de tipo tope, o sea, imposible de ser

simplificada más. En la fig. 5.1, *b* está representado el árbol de soluciones cada vértice del cual corresponde al trabajo dado, cada arco, a una variante del sondeo o a una transformación.

Los algoritmos de la tercera clase, que realizan la equivalentización semántica, permiten lograr la acción más rápida de los algoritmos combinatorios sin engendrar todas las soluciones equivalentes, o sea, simplificada más. En la fig. 5.1, *b* está representado el árbol de soluciones,

Durante la equivalentización semántica es conocido no sólo el sistema completo de axiomas, sino también el criterio constructivo que permite:

para el problema del análisis comprobar la veracidad del predicado $P_0(\Psi_a)$:

$$P_0(\Psi_a) = \begin{cases} 1, \text{ si el modelo } \Psi_a \text{ posee la propiedad prefijada,} \\ 0 \text{ en caso contrario;} \end{cases}$$

para el problema de la síntesis vincular dos abstracciones distintas, los modelos Ψ_a y Ψ_b, en un sistema único empleando el predicado de la integridad funcional $P_0(\Psi_a, \Psi_b)$:

$$P_0(\Psi_a, \Psi_b) = \begin{cases} 1, \text{ si la transformación } \Psi_a \rightarrow \Psi_b \text{ existe junto} \\ \quad \text{a la correspondencia biuvívoca entre los} \\ \quad \text{elementos de los modelos } \Psi_a \text{ y } \Psi_b, \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Lo común que caracteriza los modelos Ψ_a y Ψ_b y los diferencia de los demás es el sentido de la transformación $\Psi_a \rightarrow \Psi_b$. En otras palabras el sentido de la transformación $\Psi_a \rightarrow \Psi_b$ es la propiedad de las expresiones lingüísticas, invariante respecto a sus representaciones modelos. La lógica semántica, parte de la metalógica, investiga este sentido. Se comprende como semántica, por regla general, la semántica descriptiva que examina la conexión entre las combinaciones de signos del lenguaje formalizado y sus interpretaciones en los términos del sistema de conceptos, cuya formalización es el lenguaje dado. Aquí se comprende como semántica el estudio de la interpretación de un lenguaje formalizado en las categorías de otro con tal que los dos lenguajes son formalización de un sistema de conceptos. Llamaremos *proyectivo* a este tipo de semántica. En caso particular, cuando dos lenguajes coinciden y se investiga si se puede cumplir la propiedad determinada del modelo de estudio, la semántica proyectiva se denominará *reflexiva.*

La semántica reflexiva permite resolver los problemas del análisis de los modelos. La semántica proyectiva de la transformación $\Psi_a \rightarrow \Psi_b$ permite calcular el valor extremal de la funcional de calidad $\varphi(\Psi_b)$ de la resolución y construir el correspondiente modelo óptimo Ψ_b sin formar todos los modelos equivalentes $\{\Psi_{b_i}\}$ que disminuye considerablemente la densidad de trabajo de los algoritmos.

Para determinar la semántica proyectiva de la transformación $\Psi_a \rightarrow \Psi_b$ es necesario:

1. Hallar las características numéricas $\{\nu_i\}$ del modelo Ψ_b que determinan unívocamente el valor $\varphi(\Psi_b)$.

2. Determinar las propiedades S_b del modelo Ψ_b, en cuya presencia se puede calcular $\{\nu_i\}$.

3. Revelar las propiedades S_a del modelo Ψ_a que determinan unívocamente las propiedades S_b del modelo Ψ_b.

4. Hallar las características numéricas del modelo Ψ_a que posee las propiedades S_a que determinan unívocamente $\varphi(\Psi_b)$.

De este modo, la presencia de las propiedades S_a permite calcular unívocamente $\varphi(\Psi_b)$ sin construir de hecho Ψ_b.

Para hallar la semántica reflexiva del análisis del modelo Ψ_a es necesario:

1. Revelar las propiedades S_a del modelo Ψ_a que determinan unívocamente el predicado $P_0(\Psi_a)$.

2. Hallar las características numéricas del modelo Ψ_a que determinan la presencia de las propiedades S_a.

En ambos casos, lo principal es establecer las propiedades S_a del modelo Ψ_a que determinan la veracidad del predicado $P_0(\Psi_a)$ o $P_0(\Psi_a, \Psi_b)$. Estas propiedades del modelo Ψ_a las buscaremos en forma de propiedades de ausencia de las figuras prohibidas que forman la base del criterio de cumplimiento de las propiedades S_a. Si conocemos las figuras prohibidas, podemos resolver eficazmente los problemas del análisis y calcular de manera constructiva la funcional $\varphi(\Psi_b)$ sin engendrar todos los modelos equivalentes $\{\Psi_{b_i}\}$ (véase la fig. 5.1, *c*) durante la solución de los problemas de la síntesis. La búsqueda y el estudio de las semánticas reflexivas y proyectivas basadas en figuras prohibidas los referiremos a la metalógica y denominaremos *semántica constructiva.*

La figura 5.2 ilustra la relación entre las tres semánticas de transformación.

Fig. 5.2

El problema de buscar las figuras prohibidas se denomina *problema de caracterización*. Este problema se define por la clase de modelos $\mathbf{K}_a = \{\Psi_a\}$ que se examinan y por la propiedad S_a que se caracteriza y que determina el predicado $P_0(\Psi_a)$ o $P_0(\Psi_a, \Psi_b)$. Para resolver el problema de caracterización hay que determinar el conjunto de figuras prohibidas $\mathbf{K}_p = \{\Psi_i\}$, es decir, de tales modelos Ψ_i, cuya ausencia en el modelo dado $\Psi_a \in \mathbf{K}_a$ es la condición necesaria y suficiente de que Ψ_a posee la propiedad S_a con ello ninguno de los modelos $\Psi_i \in \mathbf{K}_p$ está presente en otra figura prohibida: un modelo $\Psi_j \in \mathbf{K}_p$.

Formalicemos los conceptos *de ausencia* y *de presencia* de un modelo en otro. Sobre el conjunto de modelos $\mathbf{K}_a$ se puede prefijar una relación de ordenación P_s, tal que $(\Psi_i, \Psi_j) \in P_s$, si Ψ_i está presente en Ψ_j. La relación P_s se denomina *relación de subordinación*, el modelo Ψ_i se llama *subordinado* al modelo Ψ_j. La relación de subordinación de modelos es la generalización de la conocida relación de *ser submodelo*. El modelo Ψ_i es el submodelo Ψ_j obtenido después de eliminar unos elementos del portador y de la signatura del modelo Ψ_j. El problema de caracterización con la relación dada de subordinación P_s se hace concreta sobre una clase de modelos, transformándose en la tarea de caracterización. Puesto que sobre la clase de modelos $\mathbf{K}_a$ pueden darse muchas relaciones de ordenación, el problema de caracterización puede considerarse como todo un conjunto de tareas de caracterización, cada una de las cuales tiene su propia solución en forma de un conjunto de figuras prohibidas.

Resolviendo la tarea de caracterización muchas cosas dependen de la opción de la relación de subordinación: la compacidad del conjunto de figuras prohibidas y la resolubilidad de esta tarea en general. El hecho de que el problema de caracterización es siempre resoluble tiene carácter de principio. Hace falta sólo escoger correctamente la relación de subordinación y obtener, conforme a esto, el planteamiento del problema resoluble de caracterización. Mostremos cuál debe ser la relación de subordinación.

Teorema 5.1 (principio de localidad). *Para una clase de modelos* $\mathbf{K}_a = \{\Psi_a\}$ *con una relación de subordinación* P_s *y para una propiedad* S_a, *el conjunto de figuras prohibidas* $\mathbf{K}_p = \{\Psi_{p_i}\}$ *existe* (*la tarea de caracterización es resoluble*) *si, y sólo si, es válido que todo modelo* Ψ_i *subordinado a un modelo* Ψ_j *con la propiedad* S_a *posee también esta propiedad.*

□Supongamos que el conjunto de figuras prohibidas existe. Entonces, según la definición de figura prohibida ningún modelo Ψ_a que posee la propiedad S_a tiene figuras prohibidas como las subordinadas.

Por otra parte, sea que la relación de subordinación es tal que a los modelos Ψ_a con la propiedad S_a inherente les están subordinadas sólo los modelos que también la tienen (fig. 5.3). En este caso, según la definición de figura prohibida el conjunto de figuras prohibidas $\mathbf{K}_p$ se forma de los

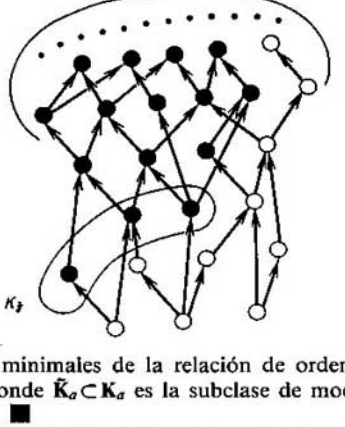


Fig. 5.3

elementos minimales de la relación de ordenación P_s sobre el conjunto $\mathbf{K}_a \setminus \tilde{\mathbf{K}}_a$, donde $\tilde{\mathbf{K}}_a \subset \mathbf{K}_a$ es la subclase de modelos Ψ_a que poseen la propiedad S_a. ■

En calidad del ejemplo examinemos el problema de caracterización de los grafos de dos partes. Las tareas de determinar dos partes del grafo y de transformar un grafo en el de dos partes tienen muchas aplicaciones: partiendo de la proyección de autómatas seguros hasta la construcción de sistemas informativos eficaces con el cese del procesamiento en paralelo. Por ejemplo, sea que un sistema informativo de biblioteca se realiza en el ordenador con dos dispositivos de discos (fig. 5.4, *a*). Para lograr la eficacia máxima de trabajo del sistema informativo de búsqueda es necesario descomponer la base de datos en dos partes de tal modo que se obtenga el tiempo mínimo de procesamiento de la demanda debido a la colocación simultánea de las cabezas de lectura e inscripción en dos dispositivos de disco. A los ficheros de la base de datos les ponemos en correspondencia los vértices del grafo. Dos vértices son adyacentes si los ficheros correspondientes son necesarios para responder a la demanda de cierto tipo (fig. 5.4, *b*). La distribución óptima de ficheros por los discos se determina por la partición del conjunto de los vértices del grafo en dos conjuntos, dentro de los cuales se encuentra el número mínimo posible de aristas (que corresponde al paralelismo máximo). Esta tarea se reduce a desentrañar la semántica proyectiva de transformación de los grafos en los de dos partes eliminando el número mínimo de aristas. La semántica se determina resolviendo el problema de caracterización de los grafos de dos partes (fig. 5.4, *c*).

La clase $\mathbf{K}_a$ se compone de los modelos, cuya signatura se forma por una relación binaria simétrica antirreflexiva. La propiedad S_a: *ser de dos partes.* Examinemos dos relaciones de subordinación: P_s^1, *ser grafo parcial* y P_s^2, *ser grafo reducible.* Llámase *reducible* un grafo G_a que se obtiene

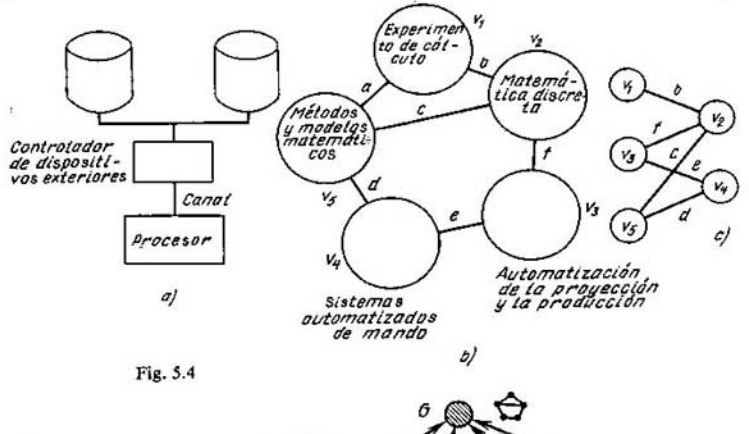


Fig. 5.4

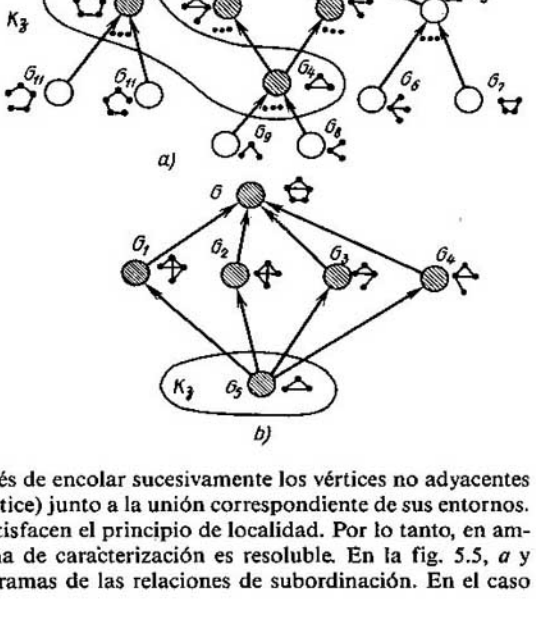


Fig. 5.5

de un grafo G_b después de encolar sucesivamente los vértices no adyacentes (uniéndolos en un vértice) junto a la unión correspondiente de sus entornos. Las dos relaciones satisfacen el principio de localidad. Por lo tanto, en ambos casos el problema de caracterización es resoluble. En la fig. 5.5, *a* y *b* se ofrecen los diagramas de las relaciones de subordinación. En el caso

de la relación de subordinación P_3^1 el conjunto de figuras prohibidas es el conjunto de los ciclos impares, en el caso de la relación de subordinación P_3^2, el conjunto de grafos completos del orden más que dos.

Así, pues, siempre se puede resolver el problema de caracterización y, por consiguiente, obtener el conjunto de figuras prohibidas que determina el criterio semántico constructivo para solucionar los problemas del análisis. Es más, el conocimiento de los conjuntos de figuras prohibidas se utiliza en el método de la equivalentización semántica en los problemas de síntesis. El principio fundamental de la equivalentización semántica consiste en conocer los modelos prohibidos concretos que presencian en el modelo Ψ_a y le molestan poseer la propiedad S_a, lo que permite determinar las estructuras locales, cuya transformación es necesaria para obtener el modelo Ψ_a con la propiedad S_a inherente. Al mismo tiempo, se realiza solamente el sondeo mínimo (inevitable) de variantes de transformaciones, es decir, no se puede mejorar el proceso de cálculo en el sentido de la densidad de trabajo. Durante la equivalentización semántica el árbol de soluciones (véase la fig. 5.1, *c*) comprende dos estrellas. La primera corresponde a la transformación $\Psi_a \to \tilde{\Psi}_a$, $P_0(\tilde{\Psi}_a, \Psi_a) = 1$, la segunda, a la $\tilde{\Psi}_a \to \Psi_b$. Buscando la solución minimal es necesario recorrer todas las ramas de la primera estrella y, en la segunda, es suficiente tomar cualquier rama, ya que todas las ramas de ésta última son equivalentes desde el punto de vista del carácter minimal de la solución que se determina por el valor $\varphi(\Psi_b)$.

Analicemos detalladamente el proceso de la equivalentización semántica. En la base de éste están los procedimientos de transformar las figuras prohibidas en las equivalentes permitidas. El sentido de la transformación $\Psi_a \to \Psi_b$ determina la equivalencia. Como regla, el procedimiento de transformar una figura prohibida en la permitida es la eliminación, la introducción o la desintegración del elemento del portador o de la signatura o bien el paso a un modelo subordinado.

Durante la equivalentización semántica para transformar un grafo en el de dos partes son posibles varios procedimientos de transformación de las figuras prohibidas, o sea, ciclos de longitud impar. Empleando la transformación para encajar el grafo en el hipercubo durante la proyección de autómatas seguros, la figura prohibida se transforma en la permitida por medio de introducir un número impar de vértices para una arista (estrictamente dicho, aquí tenemos el conjunto de transformaciones y no una sola). Si la transformación se emplea para la descomposición óptima de la base de datos, el procedimiento de transformación consiste en eliminar una arista. Es de principio que el procedimiento de transformación de la figura prohibida en la permitida existe siempre cuando la transformación $\Psi_a \to \Psi_b$ tiene sentido en general. En efecto, para todo modelo Ψ_a existe el modelo equivalente $\tilde{\Psi}_a$ que posee la propiedad S_a. Por tanto, existe la transformación de Ψ_a en $\tilde{\Psi}_a$ y cualquier transformación del modelo Ψ_a en el modelo

que posee la propiedad S_a transforma obligatoriamente las figuras prohibidas en las permitidas. La localización de la transformación global de Ψ_a en $\bar{\Psi}_a$ sobre la figura prohibida $\Psi_p \subset \Psi_a$ incluye su transformación en la permitida. De este modo, el procedimiento de la transformación de la figura prohibida en la permitida existe siempre.

En el caso general es posible el conjunto de transformaciones de la figura prohibida en la permitida. Sea $R_i = \{r_{i_j}\}$ un conjunto de procedimientos de transformar las figuras prohibidas $\Psi_i \in \mathbf{K}_p$ (es decir, para cualquier j $r_{i_j}(\Psi_i)$ es figura permitida). Construyamos el conjunto de procedimientos básicos de transformaciones $R_i^0 \subset R_i$, es decir, un conjunto minimal por la inclusión $\{r_{i_j}^0\}$ tal que para cualquier r_{i_j} existe una sucesión de transformaciones de R_i^0 que traspasa Ψ_i a $r_{i_j}(\Psi_i)$.

Examinemos los procedimientos de transformar las figuras prohibidas para transformar el mografo en el lineal lo que es importante en los problemas de organización de los datos en los sistemas de búsqueda informativa y en las bases de datos. Las características principales del emplazamiento de los datos en la memoria son la capacidad de memoria que se ocupa y el tiempo de acceso. Cuando el sistema de búsqueda informativa se prefija como un mografo la capacidad de memoria se determina por la potencia del portador, y el tiempo de acceso se determina por el tiempo de lectura de las palabras del modelo. Uno de los procedimientos de la organización óptima de los datos en la memoria es el emplazamiento lineal que supone una ordenación lineal (completa) de los objetos de los datos tal que la respuesta a cada demanda es una cadena de datos así ordenados. Pongamos los elementos del portador en correspondencia a los objetos de datos, las palabras, en correspondencia a las respuestas a las demandas. Un mografo se denomina *lineal* si permite el emplazamiento lineal de los elementos del portador, en el cual todas las palabras son cadenas. De este modo, para obtener la organización óptima de los datos, es necesario transformar el mografo en el lineal y, por lo tanto, resolver el problema de caracterización de la linealidad del mografo.

Sin concretizar la forma de figuras prohibidas (lo que examinemos más detalladamente a continuación) señalemos que son posibles dos procedimientos de transformar las figuras prohibidas en las permitidas:

1) la desintegración del elemento x del portador en x y x' con la correspondiente sustitución de x por x' en unas palabras que comprendían x;

2) la desintegración de la palabra M, es decir, su sustitución por dos palabras.

Se puede mostrar que estos procedimientos forman un conjunto básico de procedimientos de transformar las figuras prohibidas en las permitidas.

Ejemplifiquemos los procedimientos de transformar las figuras prohibidas en las permitidas empleando el mografo (fig. 5.6, *a*) que es un sistema informativo hipotético de biblioteca que incluye la información sobre los siguientes libros:

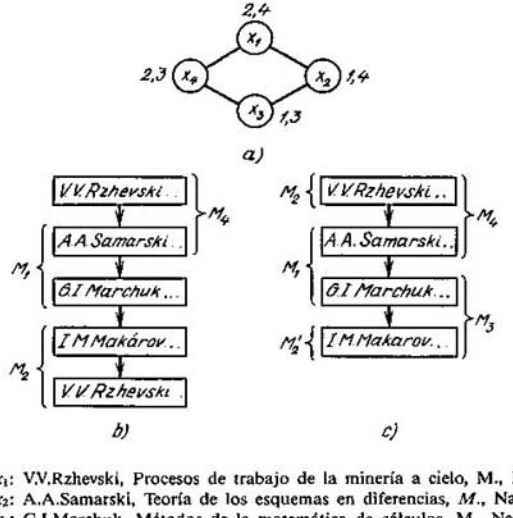


Fig. 5.6

x_1: V.V.Rzhevski, Procesos de trabajo de la minería a cielo, M., Nedra, 1978;

x_2: A.A.Samarski, Teoría de los esquemas en diferencias, *M.*, Naúka, 1977;

x_3: G.I.Marchuk, Métodos de la matemática de cálculos, M., Naúka, 1977;

x_4: Fundamentos de la automatización del control de la producción (Dirigido por I.M.Makárov, M., Vísshaya shkola, 1983);

el sistema se destina para las siguientes demandas:

M_1: Libros de los métodos de cálculo. Respuesta $\{x_2, x_3\}$;

M_2: Libros de automatización de los procesos. Respuesta $\{x_1, x_4\}$;

M_3: Libros de autores (redactores), cuyos apellidos empiezan con A a M. Respuesta $\{x_3, x_4\}$;

M_4: Libros de autores (redactores), cuyos apellidos empiezan con N a Z. Respuesta $\{x_1, x_2\}$.

El mografo dado no es lineal. Se puede mostrar que todo elemento del portador y toda palabra integran la figura prohíbida. La desintegración del elemento del portador o de la palabra debe transformar el mografo en el lineal. Por ejemplo, consideremos la desintegración del elemento x_1. El mografo transformado es lineal y se representa por la ordenación lineal dada en la fig. 5.6, *b*. Desintegrando cualquier palabra, por ejemplo M_2, el mografo se hace también lineal y se representa por la ordenación lineal dada en la fig. 5.6, *c*. En el primer caso, aumenta la capacidad de memoria ocupada por los objetos de datos, en el segundo, el promedio del tiempo de respuesta a las demandas.

Cada procedimiento de la transformación r_{i_j} se caracteriza por el valor c_{i_j}. La funcional de la calidad de transformación $\varphi(\Psi_b)$ se determina por el valor de las transformaciones de las figuras prohibidas en las permitidas.

Para cumplir la transformación $\Psi_a \to \bar{\Psi}_a$ es inevitable transformar cada figura prohibida en la permitida. Por eso, para toda figura prohibida $\Psi_{p_j} \subset \Psi_a$, escojamos uno de los procedimientos de su transformación; su colección determinará la transformación global $\Psi_a \to \bar{\Psi}_a$. En el caso general,

esta transformación posiblemente no logra el extremo de la funcional $\varphi(\Psi_b)$, incluso si para cualquier Ψ_{p_i} está elegido el procedimiento de transformación con el valor mínimo, lo que está condicionado por el posible procedimiento de transformación Ψ_{p_i} que, pese a no tener el valor mínimo, transforma al mismo tiempo otra figura prohibida Ψ_{p_i}. Además, la relación entre los procedimientos de transformación de las figuras prohibidas puede resultar muy complicada. Por eso la simple elección de procedimientos de la transformación, uno por cada $\Psi_{p_i} \subset \Psi_a$, no asegura el logro del extremo de la funcional de la calidad $\varphi(\Psi_b)$.

Está propuesto el procedimiento de la equivalentización semántica basada en la construcción de la tabla semántica. A las columnas de esta tabla les corresponden figuras prohibidas presentes en el modelo; a las filas, procedimientos de la transformación. El elemento (i, j) de la tabla es igual a 1, si la i-ésima transformación convierte la j-ésima figura prohibida en la permitida y a 0 en caso contrario. El cubrimiento de las columnas por las filas de la tabla semántica determina un conjunto de transformaciones, minimal por la inclusión. Es necesario cumplirlo para obtener del modelo Ψ_a el $\tilde{\Psi}_a$ con la propiedad S_a. Tomando en consideración que todo procedimiento de transformación puede tener valor propio, deducimos que para llegar al extremo $\varphi(\Psi_b)$ es necesario hallar cubrimiento de la tabla semántica, minimal por su valor. A veces, en esta tabla, a las filas les corresponden figuras prohibidas, a las columnas, sus transformaciones en las permitidas. Ya que esto no es de principio, utilizaremos las dos variantes de la construcción de la tabla semántica.

Consideremos el problema de la equivalentización semántica del grafo, representado en la fig. 5.4, *b*, en un grafo de dos partes. La funcional de la calidad es el mínimo de aristas eliminadas. Las figuras prohibidas (ciclos de longitud impar) están formadas por los siguientes conjuntos de aristas: $\Psi_{p_1} = \{a, b, c\}$, $\Psi_{p_2} = \{a, b, d, e, f\}$. El procedimiento de la transformación -eliminación de la arista- tiene el valor 1; el procedimiento concreto de la transformación se designa indicando la arista para eliminar. La tabla semántica tiene siguiente forma:

Tabla 5.1

Ψ_{p_1}	Ψ_{p_2}	
1	1	*a*
1	1	*b*
1		*c*
	1	*d*
	1	*e*
	1	*f*

El cubrimiento minimal es, por ejemplo, $\pi = \{a\}$. Por consiguiente, eliminando la arista a obtenemos un grafo de dos partes (fig. 5.4, *c*); además, alcanzamos el mínimo $\varphi(\Psi_b) = 1$.

En el caso general, el procedimiento de la transformación puede vincularse no con los elementos del portador o de la signatura del modelo, sino con algunos de sus componentes. Por eso, en el caso general, la equivalentización semántica supone la construcción del sistema jerárquico de las tablas de una profundidad k, determinada por el número de niveles en los procedimientos de transformaciones. El cubrimiento de las columnas por las filas de la primera tabla indica qué componentes de las figuras prohibidas deben cambiarse cuando el modelo Ψ_a se reduce a la forma que se interpreta en los términos del modelo Ψ_b. La determinación de los componentes que deben ser cambiados para cambiar los componentes hallados al paso anterior se reduce al cubrimiento de la segunda tabla construida análogamente, etc., hasta construir la k-ésima tabla, cuyas filas o columnas corresponden a los elementos del portador o de la signatura que deben ser cambiados sin falta cuando el modelo Ψ_a se reduce a la forma interpretada en los términos del modelo Ψ_b (fig. 5.7).

Para determinar el número mínimo de los elementos del portador o de la signatura que corresponden a los elementos de la k-ésima tabla es necesario generar todos los conjuntos, cada uno de los cuales comprende las filas (columnas) que se cubren en la última, k-ésima tabla. Esto corresponde al sondeo de todos los cubrimientos de la $(k-1)$-ésima tabla. Para obtener todos los cubrimientos de la $(k-1)$-ésima tabla es necesario generar todos los cubrimientos de la $(k-2)$-ésima tabla, etc. De este modo, para hallar la solución minimal, es necesario el sondeo de todas las combinaciones de los cubrimientos de las primeras $(k-1)$ tablas. Este procedimiento contiene, en principio, el sondeo.

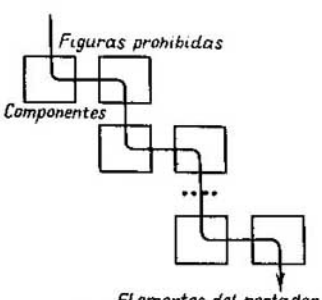


Fig. 5.7

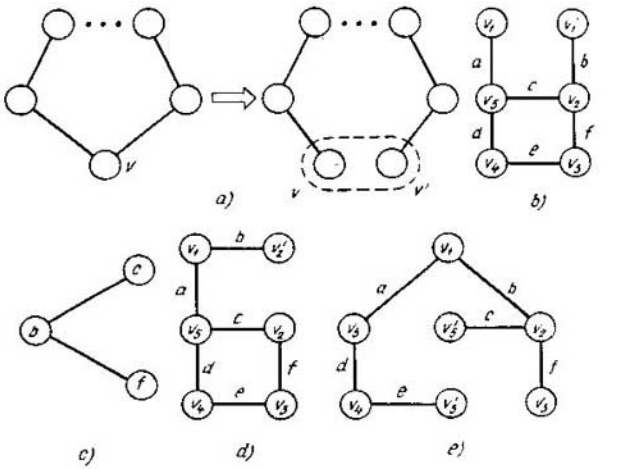


Fig. 5.8

De tal manera, la determinación de la complejidad de solución es un proceso estándar, minimal por su densidad de trabajo. Este proceso requiere el trabajo en varios órdenes menos que el de la generación efectiva de todas las estructuras equivalentes durante la búsqueda de la solución minimal por medio de la equivalentización sintáctica.

Los procedimientos de transformar las figuras prohibidas, siendo unívocos respecto a ellas, pueden ser en total tanto unívocos como no respecto al modelo. Por ejemplo, para el carácter de dos partes del grafo, el procedimiento de transformar figuras prohibidas, ciclos impares, basado en la eliminación de la arista es también unívoco para el modelo en total. Consideremos el procedimiento de transformar ciclos impares que consiste en la desintegración de uno de los vértices v y v', cada uno de los cuales es incidente a una de dos aristas x e y del vértice que se desintegra (fig. 5.8, *a*) (designemos el procedimiento de transformación por $v(x, y)$). Este procedimiento de transformación se usa en la equivalentización semántica cuando se descompone el sistema informativo exigiendo la acción más rápida, es decir, el paralelismo máximo del procesamiento de la información. Esta exigencia condiciona la colocación de todas las partes de los datos correspondientes a los vértices adyacentes en los discos diferentes, es decir, lleva a duplicar algunas partes. Este procedimiento de transformar figuras prohibidas no es unívoco para el modelo en total (para el grafo). Es que durante la desintegración del vértice v, incidente a las aristas x e y, la transforma-

ción de la figura prohibida fija solamente, lo que el nuevo vértice v es incidente a la arista x y el nuevo vértice v', a la arista y. Para el grafo en total, eso significa la desintegración del vértice v en v y v' con la correspondiente partición del entorno Γv cuando x e y se encuentran en distintos entornos nuevos. Este procedimiento de transformación no indica la distribución de todos los vértices por nuevos entornos. En este procedimiento de transformación, la tabla semántica para el grafo (véase la fig. 5.4, *b*) tiene siguiente forma:

Tabla 5.2

Ψ_{p_1}	Ψ_{p_2}	
1	1	$v_1(a, b)$
1		$v_2(b, c)$
1		$v_5(a, c)$
	1	$v_2(b, f)$
	1	$v_3(e, f)$
	1	$v_4(d, e)$
	1	$v_5(a, d)$

En caso de procedimientos no unívocos de transformaciones es necesario comprobar todos los cubrimientos de la tabla semántica. Consideremos tres cubrimientos: $\pi = \{v_1(a, b)\}$, $\pi_2 = \{v_2(b, c), v_2(b, f)\}$, $\pi_3 = \{v_5(a, c), v_3(e, f)\}$.

El primer cubrimiento con la potencia minimal da la solución minimal (fig. 5.8, *b*). Empero el segundo cubrimiento con la potencia no minimal también determina la solución minimal. Ambas transformaciones que componen π_2 desintegran v_2. ¿Cuántos vértices nuevos dan estas desintegraciones juntas? Responden a esta pregunta la construcción y la coloración de un grafo especial construido sobre un conjunto de aristas, incidentes a v_2 (fig. 5.8, *c*). La coloración del grafo $\{b\}$, $\{c, f\}$ determina el número de vértices después de la desintegración y la partición del entorno Γv_2. La solución obtenida es minimal (fig. 5.8, *d*). La transformación correspondiente a π_3 (fig. 5.8, *e*) no es minimal.

De este modo, si aplicamos los procedimientos de transformaciones no unívocas para el modelo en total, para todo cubrimiento es necesario cons-

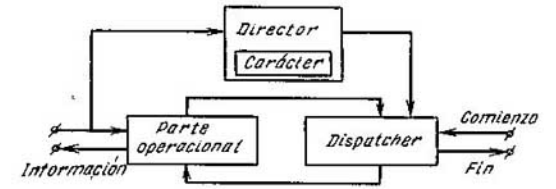


Fig. 5.9

truir grafos especiales y determinar su coloración minimal. Por eso son muy actuales estimaciones del número cromático del grafo (véase el capítulo 3) que permiten separar rápidamente la mayor parte de cubrimientos que corresponden a los grafos con gran número cromático. Son también importantes los métodos «rápidos» de la coloración de los grafos. En total, la equivalentización semántica permite obtener solución absolutamente óptima junto al sondeo minimal (inevitable).

Basándose en la equivalentización semántica obtenemos la estructura de dos circuitos del paquete de acción rápida de programas aplicados (fig. 5.9), en el cual, empleando el módulo «carácter», se realiza la sintonización automática de la estrategia óptima durante la transformación $\Psi_a \rightarrow \Psi_b$.

Esto atribuye «carácter intelectual» al paquete de programas aplicados y permite catalogar estos paquetes en la clase de sistemas del intelecto artificial.

En los capítulos anteriores fueron considerados los problemas de caracterización del encaje del grafo en el plano, en el espacio booleano, de caracterización de la estructura en serie-paralela de los diagramas de Hasse y de la coloración de los grafos. Examinemos ahora los problemas de caracterización de la ordenación parcial del mografo, de proyección de esquemas lógicos en las bases funcionales inconexas, de proyección de esquemas lógicos de salidas múltiples, de descomposición de los grafos de transiciones en el producto cartesiano parcial y, además, problemas de caracterización que surgen durante el diseño de emplazamientos óptimos de los datos en los sistemas informativos. La caracterización de los modelos permite revelar causas objetivas que determinan la complejidad de solución y la densidad de trabajo de su búsqueda.

§ 5.2. Caracterización de la ordenación parcial del mografo

Antes de establecer las causas que llevan a la correspondencia entre una terma primaria y dos (o más) vértices en un grafo estructural (la desintegración de las termas primarias) examinemos la transformación del mografo en el grafo estructural prefijando la FND tope de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = \underbrace{x_1\bar{x}_3\bar{x}_5}_{1} \vee \underbrace{x_1x_4}_{2} \vee \underbrace{x_2x_3}_{3} \vee$$

$$\vee \underbrace{\bar{x}_1x_3\bar{x}_5}_{4} \vee \underbrace{x_3\bar{x}_4x_5}_{5} \vee \underbrace{x_2x_4x_5}_{6},$$

determinada por el modelo $\Psi_a = \langle M, S_2, S_3 \rangle$;

$$M = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_5\},$$
$$S_2 = \{\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}\},$$
$$S_3 = \{\{x_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5\}, \{\bar{x}_1, x_3, \bar{x}_5\}, \{x_3, \bar{x}_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_5\}\}.$$

El mografo $G^M(\Psi_a)$ se representa en la fig. 5.10, *a*.

Examinemos el submografo $(G^M)'$ (fig. 5.10, *b*) que da la tercera, la quinta y la sexta implicante simples. A la tercera implicante x_2x_3 le ponemos en correspondencia la cadena $v(x_2) \leqslant v(x_3)$. A la quinta implicante simple $x_3\bar{x}_4x_5$ le ponemos en correspondencia la cadena $v(x_3) \leqslant v(\bar{x}_4) \leqslant v(x_5)$, a la sexta implicante $x_2x_4x_5$, la cadena $v(x_2) \leqslant v(x_4) \leqslant v(x_5)$. Prefijando así las relaciones de ordenación, obtenemos que $v(x_2) \leqslant v(x_3) \leqslant v(\bar{x}_4)$, o sea, $v(x_2)$ es comparable con $v(\bar{x}_4)$, $v(x_2) \gtrless v(\bar{x}_4)$ que contradice a la prefijación.

Para responder si tal prefijación de la relación $\leqslant$ es simplemente infortunada, sin saber la semántica de transformación, es imprescindible construir completamente el árbol sintáctico de esta transformación, a cuyos vértices pendientes les corresponden diagramas H_i; además se consideran no sólo estas tres implicantes sencillas, sino todo el mografo prefijado $G^M(\Psi_a)$. El número de vértices pendientes de este árbol es igual a $2!\cdot2!\cdot3!\cdot 3!\cdot3!\cdot3! = 5184$. Construyendo tal número de diagramas se puede cerciorarse que no existe modo de prefijación de la relación $\leqslant$ en el mografo considerado $G^M(\Psi_a)$, cuando tiene lugar una correspondencia biunívoca entre los termas primarias $x_i^{\sigma_i}$ y los vértices de diagramas H tal que toda cadena $v(x_a) \leqslant v(x_b) \leqslant \ldots \leqslant v(x_c)$ corresponde biunívocamente a la implicante sencilla $x_a \cdot x_b \ldots \cdot x_c$.

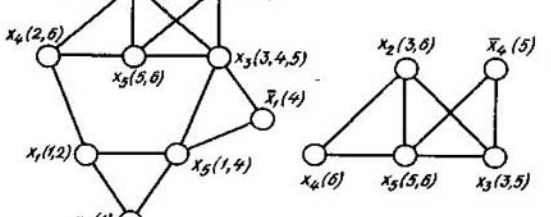


Fig. 5.10

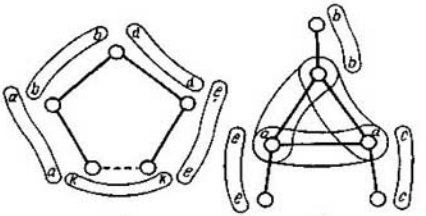


Fig. 5.11 *А* *Б*

La densidad de trabajo en la revelación de tales contradicciones y, por lo tanto, en la construcción del esquema absolutamente mínimo es considerablemente menor, si se conoce la semántica de transformación determinada por la distribución de las figuras prohibidas.

Teorema 5.2. *Figuras prohibidas* $Q_А$, $Q_Б$ *de la transformación de un mografo* G^M *en el diagrama* H *son los submografos tipos* А *y* Б (fig. 5.11).

El submografo tipo А es un ciclo de longitud impar con la conmutación cíclica de los pesos. El submografo tipo Б es un triángulo con vértices pendientes, cada uno de los cuales tiene peso común con el vértice pendiente adyacente y todos los vértices del triángulo tienen peso común con tal que los vértices pendientes pueden coincidir tanto dos a dos como todos juntos uniendo de modo correspondiente sus identificadores. La presencia de una de estas figuras en el mografo hace imposible en principio la prefijación de la relación $\leqslant$ realizando la transformación $G^M \to H$ sin desintegrar termas primarias en el mografo G^M, lo que se realiza «a ciegas» sin saber la semántica de la transformación $G^M \to H$. Además, excepto la eliminación de figuras prohibidas se desintegran los termas primarias en exceso, lo que disminuye la optimicidad de la solución obtenida. Como se muestra a continuación, en el grafo estructural H construido según el mografo G^M sin escoger las figuras prohibidas, se realizan las desintegraciones en exceso.

La selección de las figuras prohibidas de los tipos А y Б se reduce a la tarea de hallar los ciclos impar en el mografo junto a la verificación sucesiva de la distribución de pesos sobre ellos. Escogiendo ciclos de longitud impar en el mografo, los vértices de peso igual no se consideran como los vértices que pueden corresponder sólo a los vértices pendientes de las figuras tipo Б.

En el ejemplo dado anteriormente, para escoger ciclos de longitud impar, es suficiente considerar el subgrafo $(G^M)''$ representado en la fig. 5.12, *а*. Examinando este mografo, establecemos que las figuras prohibidas de tipo А son los siguientes submografos:

$Q_1 = \{x_2(3, 6), x_5(6, 5), x_3(5, 3)\}$,

$Q_2 = \{x_2(3, 6), x_4(6, 2), x_1(2, 1), \bar{x}_5(1, 4), x_3(4, 3)\}$,

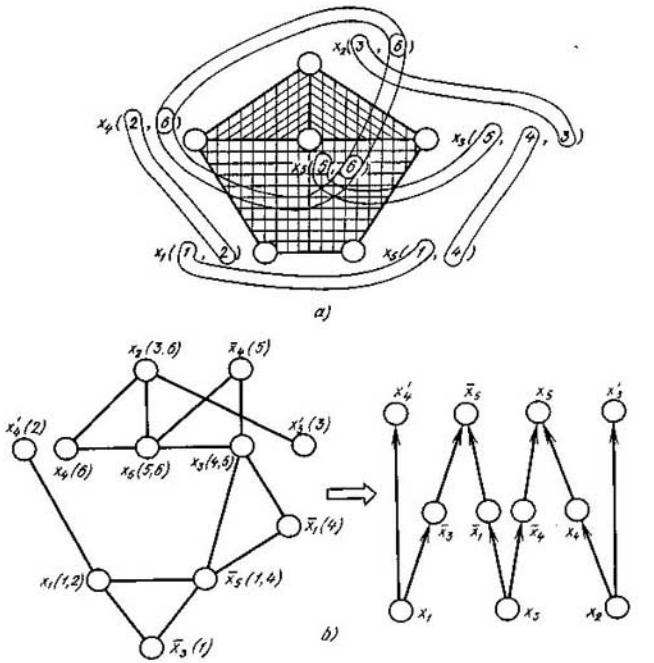


Fig. 5.12

$Q_3 = \{x_5(6, 5), x_3(5, 4), x_5(4, 1), x_1(1, 2), x_4(2, 6)\}$;

la figura prohibida tipo Б es el submografo $\{\{x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_5, x_4\}\}$.

En adelante, la figura de tipo Б se prefijará como un triángulo correspondiente. En este caso, la cuarta figura prohibida tiene la siguiente forma: $Q_4 \supset \{x_4(2, 6), x_5(5, 6), x_2(3, 6)\}$.

La propiedad principal de las figuras prohibidas tipos A y Б consiste en que, al desintegrar cualquier vértice de una figura tipo A y cualquier vértice del triángulo de una figura tipo Б, estos submografos dejan de ser figuras prohibidas. De este modo, las desnitegraciones semejantes son procedimientos para transformar las figuras prohibidas tipos A y Б en las permitidas. El procedimiento de la equivalentización semántica del mografo en el parcialmente ordenado es estándar. En la tabla semántica, a las filas

les corresponden las figuras prohibidas tipo А o Б, a las columnas, los vértices en desintegración del mografo. La tabla semántica para el caso a examinar se ofrece en la tabla 5.3.

Tabla 5.3

Q_i	$x_1(1, 2)$	$x_2(3, 6)$	$x_3(4, 5)$	$x_3(3, 4)$	$x_3(3, 5)$	$x_4(2, 6)$	$x_5(5, 6)$	$\bar{x}_5(1, 4)$
Q_1	0	1	0	0	1	0	1	0
Q_2	1	1	0	1	0	1	0	1
Q_3	1	0	1	0	0	1	1	1
Q_4	0	1	0	0	0	1	1	0

Para disminuir la densidad de trabajo de la determinación del cubrimiento de la tabla semántica, eliminaremos filas y columnas que se absorben. En este caso, las reglas de absorción son las siguientes.

La *columna* α *se absorbe por la columna* β, si no existe una tercera columna ponderada por la misma letra que la columna α y, también, el producto vectorial de las columnas α y β es igual a α.

La *fila* α *se absorbe por la fila* β, si el producto vectorial de estas filas es igual a la fila β.

En el caso considerado, la primera y la octava columna se absorben por la sexta. Borrando las columnas que se absorben, tenemos seis cubrimientos de la tabla semántica: $\{x_2(3, 6), x_4(2, 6)\}$, $\{x_2(3, 6), x_5(5, 6)\}$, $\{x_2(3, 6), x_3(4, 5)\}$, $\{x_4(2, 6), x_5(5, 6)\}$, $\{x_3(3, 4), x_5(5, 6)\}$, $\{x_3(3, 5), x_4(2, 6)\}$. Cada uno de estos cubrimientos engendra dos desintegraciones. Por consiguiente, la potencia de la extensión del portador del modelo Ψ_a es igual a 2 y la realización absolutamente minimal de la FND tope que consideramos contiene 11 llaves $L = |M_a| + |\Delta M_a| = 11$.

Para más precisión, consideremos el último cubrimiento y distingamos la letra x_3 en la tercera palabra de la x_3 en la quinta añadiendo la raya en el índice superior: x_3'. A continuación, esta redenominación se llamará *rayado* de la letra en la palabra correspondiente. Análogamente, rayamos la letra x_4 en la segunda palabra. Como resultado obtenemos el modelo $\bar{\Psi}_a$:

$$\bar{\Psi}_a = \langle M_a, S_2, S_3 \rangle,$$
$$M_a = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, x_3, x_3', \bar{x}_3, x_4, x_4', \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_5\},$$
$$S_2 = \{\{x_1, x_4'\}, \{x_2, x_3'\}\},$$
$$S_3 = \{\{x_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5\}, \{\bar{x}_1, x_3, \bar{x}_5\}, \{x_3, \bar{x}_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_5\}\};$$

que es equivalente al inicial y se interpreta en los términos de conjunto parcialmente ordenado (fig. 5.12, *b*):

$$x_1 \leftrightarrow v(x_1),\ x_2 \leftrightarrow v(x_2),\ x_3 \leftrightarrow v(x_3),$$
$$\bar{x}_1 \leftrightarrow v(\bar{x}_1),\ x_3' \leftrightarrow v(x_3'),\ \bar{x}_3 \leftrightarrow v(\bar{x}_3),$$

$x_4 \leftrightarrow v(x_4)$, $x_4' \leftrightarrow v(x_4')$, $\bar{x}_4 \leftrightarrow v(\bar{x}_4)$,
$x_5 \leftrightarrow v(x_5)$, $\bar{x}_5 \leftrightarrow v(\bar{x}_5)$,

además,

$x_1\bar{x}_3\bar{x}_5 \leftrightarrow v(x_1) \leqslant v(\bar{x}_3) \leqslant v(\bar{x}_5)$,
$x_1x_4' \leftrightarrow v(x_1) \leqslant v(x_4')$, $x_2x_3' \leftrightarrow v(x_2) \leqslant v(x_3')$,
$\bar{x}_1x_3\bar{x}_5 \leftrightarrow v(x_3) \leqslant v(\bar{x}_1) \leqslant v(\bar{x}_5)$,
$x_3\bar{x}_4x_5 \leftrightarrow v(x_3) \leqslant v(\bar{x}_4) \leqslant v(x_5)$,
$x_2x_4x_5 \leftrightarrow v(x_2) \leqslant v(x_4) \leqslant v(x_5)$.

Si el cubrimiento de la primera tabla tiene al menos dos letras iguales en el sentido lexicográfico, las palabras donde se realiza su rayado se determinan por la coloración del grafo G. El grafo G está construido sobre el conjunto de palabras que contienen esas letras. Dos vértices suyos son adyacentes, si la letra debe desintegrarse por estas palabras.

De este modo, el conocimiento de la semántica de la transformación $G^M \to H$ permitió sustituir el sondeo de 5184 diagramas H_i prácticamente construidos por el sondeo de seis cubrimientos de la tabla semántica. En el caso general, si se conoce la semántica, la densidad de trabajo disminuye por el número combinatorio de veces en comparación con el número de todas las soluciones equivalentes.

Examinemos los ejemplos que ilustran el teorema 5.2.

Ejemplo 5.1. El mografo $G^M = \langle V, S_2, S_3 \rangle$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $S_2 = \{\underbrace{\{a, e\}}_{1}, \underbrace{\{b, d\}}_{2}, \underbrace{\{d, c\}}_{3}\}$, $S_3 = \{\underbrace{\{a, b, c\}}_{4}\}$ contiene las figuras prohibidas $Q_1 = \{b(2, 4), c(4, 3), d(3, 2)\}$; $Q_2 = \{a(4, 1), b(4, 2), c(4, 3)\}$ (fig. 5.13, *a*) que engendran la tabla semántica (tabla 5.4).

Tabla 5.4

Figuras prohibidas	$a(1, 4)$	$b(2, 4)$	$c(3, 4)$	$d(2, 3)$
Q_1	0	1	1	1
Q_2	1	1	1	0

La tabla 5.4 tiene tres cubrimientos: $\pi_1 = \{b(2, 4)\}$, $\pi_2 = \{c(3, 4)\}$, $\pi_3 = \{a(1, 4), d(2, 3)\}$; con su ayuda el mografo de partida puede reducirse a la forma que se interpreta mediante tres procedimientos (fig. 5.13, *b*).

Ejemplo 5.2. El mografo $G^M = \langle V, S_2, S_3 \rangle$,

$V = \{a, b, c, d\}$, $S_2 = \{\underbrace{\{a, d\}}_{1}, \underbrace{\{b, d\}}_{2}, \underbrace{\{c, d\}}_{3}\}$, $S_3 = \{\underbrace{\{a, b, c\}}_{4}\}$,

contiene tres figuras prohibidas de tipo A y una tipo Б: $Q_1 = \{a(1, 4), b(2, 4), d(1, 2)\}$, $Q_2 = \{b(2, 4), c(3, 4), d(2, 3)\}$, $Q_3 = \{a(1, 4), c(3, 4), d(1, 3)\}$, $Q_4 = \{a(1, 4), b(2, 4), c(3, 4)\}$ que engendran la tabla semántica (tabla 5.5).

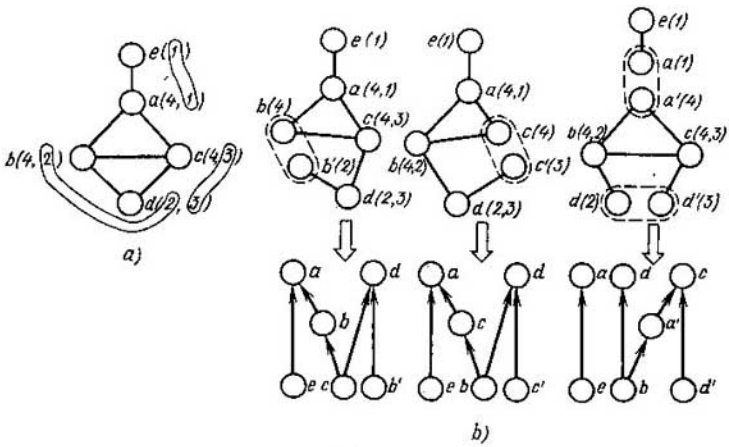


Fig. 5.13

Tabla 5.5

Figuras prohibidas	$a(1,4)$	$b(2,4)$	$c(3,4)$	$d(1,3)$	$d(1,2)$	$d(2,3)$
Q_1	1	1	0	0	1	0
Q_2	0	1	1	0	0	1
Q_3	1	0	1	1	0	0
Q_4	1	1	1	0	0	0

La tabla 5.5 tiene seis cubrimientos: $\pi_1 = \{a(1, 4), b(2, 4)\}$, $\pi_2 = \{a(1, 4), c(3, 4)\}$, $\pi_3 = \{b(2, 4), c(3, 4)\}$, $\pi_4 = \{a(1, 4), d(2, 3)\}$, $\pi_5 = \{b(2, 4), d(1, 3)\}$, $\pi_6 = \{c(3, 4), d(1, 2)\}$; cada uno de ellos engendra el diagrama de Hasse de complejidad 6. Para ser precisos, tomemos el primer cubrimiento, rayemos la letra a en la primera palabra y la letra b, en la segunda. Como resultado obtenemos el mografo.

$\bar{G}^M = \langle \bar{V}, S_2, S_3 \rangle$,

$\bar{V} = \{a, a', b, b', c, d\}$, $S_2 = \{\underbrace{\{a', d\}}_{1}, \underbrace{\{b', d\}}_{2}, \underbrace{\{c, d\}}_{3}\}$, $S_3 = \{\underbrace{\{a, b, c\}}_{4}\}$

que equivalentiza al inicial y se interpreta en las categorías del conjunto parcialmente ordenado $\langle V, \leqslant \rangle$:

$\{a', d\} \leftrightarrow v(a') \leqslant v(d)$, $\{b', d\} \leftrightarrow v(b') \leqslant v(d)$,

$\{c, d\} \leftrightarrow v(c) \leqslant v(d)$, $\{a, b, c\} \leftrightarrow v(c) \leqslant v(a) \leqslant v(b)$.

Analicemos la estabilidad de figuras prohibidas en dependencia de las condiciones de frontera, es decir, de las condiciones de intersección de la figura prohibida con otra parte del mografo.

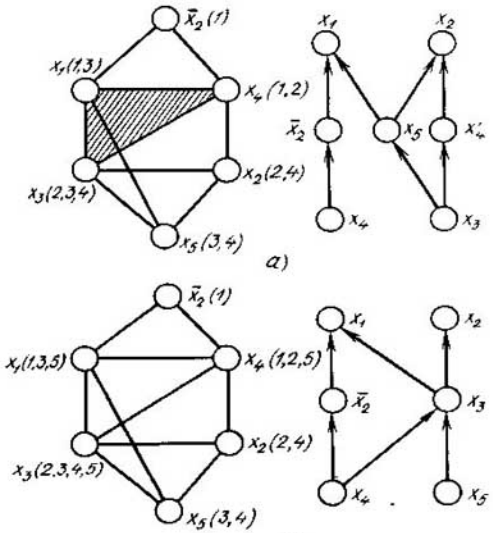


Fig. 5.14

Condiciones de inestabilidad de una figura prohibida tipo A. *La composición de una figura de tipo A y una palabra, cuyos portadores coinciden, no debe infringir condiciones de la interpretabilidad del mografo en categorías del conjunto parcialmente ordenado.*

Examinemos el mografo

$$G^M = \langle V, S_3 \rangle, \quad V = \{x_1, \bar{x}_2, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$S_3 = \{\underbrace{x_1, \bar{x}_2, x_4}_{1}\}, \underbrace{\{x_2, x_3, x_4\}}_{2}, \underbrace{\{x_1, x_3, x_5\}}_{3} \underbrace{\{x_2, x_3, x_5\}}_{5}\},$$

que contiene la figura prohibida tipo A:

$$Q_A = \{x_1(1, 3), x_3(3, 2), x_4(2, 1)\}.$$

Transformando este mografo en el grafo estructural, es necesario desintegrar una de las letras x_1, x_3, x_4. Para ser precisos, desintegremos x_4 en la segunda palabra. Como resultado obtenemos el mografo

$$\tilde{G}^M = \langle \tilde{V}, S_3 \rangle, \quad \tilde{V} = \{x_1, \bar{x}_2, x_2, x_3, x_4, x_4', x_5\},$$

$$S_3 = \{\underbrace{\{x_1, \bar{x}_2, x_4\}}_{1}, \underbrace{\{x_2, x_3, x_4'\}}_{2}, \underbrace{\{x_1, x_3, x_5\}}_{3}, \underbrace{\{x_2, x_3, x_5\}}_{4}\},$$

que se interpreta en categorías del conjunto parcialmente ordenado (fig. 5.14, *a*).

Introduzcamos el concepto del par de vértices exteriormente inestables. Llámase *par de vértices exteriormente inestables respecto a un submografo* $(G^M)'$ de un mografo G^M a un par de vértices v_k, v_l ponderados por termas primarias $\bar{x}_i$, x_i, $v_k(\bar{x}_i)$, $v_l(x_i)$ tales que la unión de vértices adyacentes a $v_k(\bar{x}_i)$ conforme a un identificador α y de vértices adyacentes a $v_l(x_i)$ conforme a un identificador β incluye el portador del submografo $(G^M)'$.

En el ejemplo a examinar se tiene un par de vértices exteriormente inestables $v(\bar{x}_2)$, $v(x_2)$ respecto al portador de la figura prohibida seleccionada Q. El identificador 1 juega el papel de α, 2 ó 4, el de β.

Según la relación de Poretski

$$A\bar{x} \vee Bx = A\bar{x} \vee Bx \vee AB,$$

al mografo se le puede añadir la palabra AB sin infringir la equivalencia de prefijación por el de la función booleana.

En el caso de presencia de un par de vértices exteriormente inestables en el mografo, la palabra AB tiene la forma

$$(\alpha \setminus \bar{x}_i) \cup (\beta \setminus x_i).$$

En este caso es $x_1x_3x_4$ puesto que el mografo es un retículo distributivo.

La palabra añadida $\{x_1, x_3, x_4\}$ despierta la inestabilidad de la figura prohibida $\{x_1(1, 3), x_3 = (2, 3), x_4(1, 2)\}$. Como resultado el mografo

$$G^M = \langle V, S_3 \rangle, \quad V = \{x_1, \bar{x}_2, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$S_3 = \{\underbrace{\{x_1, \bar{x}_2, x_4\}}_{1}, \underbrace{\{x_2, x_3, x_4\}}_{2}, \underbrace{\{x_1, x_3, x_5\}}_{3}, \underbrace{\{x_2, x_3, x_5\}}_{4}, \underbrace{\{x_1, x_3, x_4\}}_{5}\}$$

es interpretable en categorías del conjunto parcialmente ordenado (fig. 5.14, *b*).

Añadiendo palabras en el caso de un par de vértices exteriormente inestables respecto a la figura prohibida debe considerarse también la añadidura de conexiones que pueden conducir a que aparezcan las figuras prohibidas complementarias. En el mografo, las conexiones (aristas) se añaden, si la palabra que se añade incluye estrictamente al portador de la figura prohibida.

Condiciones de inestabilidad de la figura prohibida tipo Б. 1. *Una figura prohibida tipo* Б *es inestable si, ponderando el vértice pendiente, el identificador de la palabra, conforme a la cual este vértice es adyacente al vértice del triángulo de la figura, pondera otro más vértice del triángulo.*

Examinemos el mografo

$$G^M = \langle V, S_2, S_3 \rangle, \quad V = \{x_1, \bar{x}_6, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$S_2 = \{\underbrace{\{x_1, \bar{x}_6\}}_{1}, \underbrace{\{x_3, x_4\}}_{2}\}, \quad S_3 = \{\underbrace{\{x_1, x_3, x_5\}}_{3}, \underbrace{\{x_2, x_3, x_5\}}_{4}\},$$

que satisface esta condición. No contiene figuras prohibidas: la correspondencia biunívoca entre los terms primarios (letras) del mografo y

los vértices del grafo estructural, con la cual cada palabra corresponde biunívocamente al camino tiene la forma siguiente:

$\{x_1, \bar{x}_6\} \leftrightarrow v(x_1) \leqslant v(\bar{x}_6)$, $\{x_3, x_4\} \leftrightarrow v(x_4) \leqslant v(x_3)$,
$\{x_1, x_3, x_5\} \leftrightarrow v(x_1) \leqslant v(x_5) \leqslant v(x_3)$,
$\{x_2, x_3, x_5\} \leftrightarrow v(x_2) \leqslant v(x_5) \leqslant v(x_3)$.

2. *Una figura prohibida tipo* Б *es inestable, si la condición* 1 *se cumple para dos vértices pendientes, pero es estable si esta condición se cumple para los tres vértices.*

Analicemos el mografo

$G_\alpha^M = \langle V, S_3 \rangle$, $V = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$S_3 = \{\underbrace{\{a, c, d\}}_{1}, \underbrace{\{a, b, e\}}_{2}, \underbrace{\{b, c, f\}}_{3}, \underbrace{\{a, b, c\}}_{4}\}$,

Fig. 5.15

que contiene una figura prohibida inenstable de tipo A

$$Q_A = \{a(1, 2), b(2, 3), c(1, 3)\}$$

y una figura prohibida estable tipo Б, cuya base es el triángulo con los vértices a, b, c, y los vértices pendientes d, e, f. Esta figura será inestable si se añade una de las palabras $\{b, e, f\}$, $\{c, d, f\}$, $\{a, d, e\}$.

El caso particular de la ordenación parcial del mografo es la orientación transitiva del grafo. Aquí el mografo se considera sin simulación, o sea, las palabras del modelo obtenido son los subgrafos máximamente completos del grafo, sobre el cual se realiza la orientación transitiva.

Para este caso tenemos tres figuras prohibidas. Dos primeras figuras son tipo Q_A y $Q_Б$ consideradas sin simulación, la tercera es el grafo G_α^M sin simulación, el que es la composición de una figura prohibida inestable tipo A y una estable tipo Б.

Examinemos la aplicación del teorema 5.2 durante la orientación transitiva de grafos en el ejemplo de un representante de una de las familias transitivamente no orientadas de grafos: un grafo que hace completo un ciclo de longitud más que cinco. Consideremos un ciclo de longitud igual a seis. Lo hace completo el grafo G dado en la fig. 5.15, *a*.

Aplicando el algoritmo de formación de subgrafos completos al grafo considerado (fig. 5.15, *b*), obtenemos el conjunto de subgrafos completos $\{\{b, d, f\}, \{a, c, e\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$ que forma la signatura del mografo (fig. 5.15, *c*):

$$G^M = \langle V, S_2, S_3\rangle, \; V = \{a, b, c, d, e, f\},$$

$$S_3 = \{\underbrace{\{b, d, f\}}_{1}, \underbrace{\{a, c, e\}}_{2}\}, \; S_2 = \{\underbrace{\{a, d\}}_{3}, \underbrace{\{b, e\}}_{4}, \underbrace{\{c, f\}}_{5}\}.$$

El mografo $G^M = \langle V, S_2, S_3\rangle$ contiene dos figuras prohibidas estables de tipo Б: $Q_{Б1} = \{\{b, d, f\}, \{b, e\}, \{a, d\}, \{c, f\}\}$, $Q_{Б2} = \{\{a, c, e\}, \{a, d\}, \{c, f\}, \{b, e\}\}$. Desintegrando uno de los vértices del triángulo de cada figura prohibida, obtenemos el grafo transitivamente orientado. Son posibles nueve procedimientos de la desintegración. En cada uno de ellos hay que desintegrar dos vértices ya que estos triángulos no se intersecan. Para ser precisos, escogemos los vértices c y f (fig. 5.15, *d*). Como resultado obtenemos el grafo transitivamente orientado (fig. 5.15, *e*) que se transforma en el grafo estructural (fig. 5.15, *f*) después de eliminar arcos de cierre transitivo.

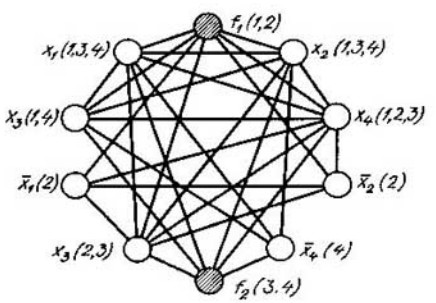
§ 5.3. Caracterización de la conexión de salida de los circuitos lógicos. Minimización estructural

El diseño de los circuitos lógicos de salidas múltiples en las bases topológicas no se distingue del diseño de los circuitos de una salida, si se puede leer la información de elementos que no son minimales ni maximales y, además, se pone una sola restricción: no desintegrar los elementos del grafo, ponderados por las letras de salida f_i. Como regla, diseñando los circuitos de salidas múltiples en las bases funcionales el sistema realizado de funciones booleanas se reduce a una función o bien se buscan las intersecciones de dominios unitarios de funciones booleanas y se sintetizan los circuitos

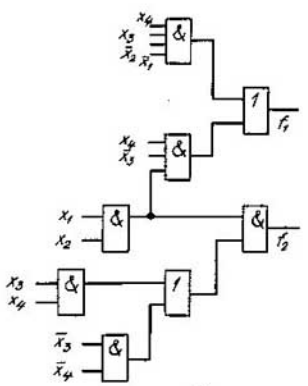
por las funciones booleanas que describen estas intersecciones. El circuito final es una composición de los circuitos que realizan el comportamiento de las funciones booleanas dadas en las intersecciones de las zonas de trabajo y los circuitos-montaje, cuyas salidas coinciden con los canales de salida del circuito buscado. Si los dominios unitarios no se intersectan, en el empleo de los métodos conocidos tiene lugar la realización inconexa del sistema de funciones booleanas. Precisamente este caso se encuentra con frecuencia en la práctica. En el enfoque propuesto para el diseño de los circuitos lógicos tenemos realización conexa del sistema de funciones booleanas. Examinemos el siguiente ejemplo. Sea dado un sistema de funciones booleanas de tipo

$$f_1 = \underbrace{x_1x_2\bar{x}_3x_4}_{1} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_3x_4}_{2}; \quad f_2 = \underbrace{x_1x_2x_3x_4}_{3} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{4}.$$

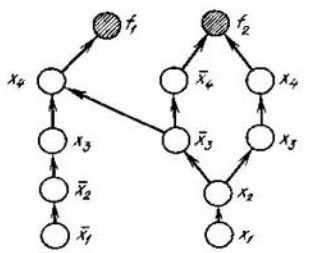
Transformemos el mografo $G^M(\{f_i\})$ que prefija este sistema (fig. 5.16, *a*) en un grafo estructural $H(\{f_i\})$ de tal modo que los elementos maximales



a)



c)



b)

Fig. 5.16

sean ponderados por las letras que identifican los canales de salida y ninguno de los vértices que no son elementos maximales sea ponderado por la letra de salida f_i. El grafo estructural está representado en la fig. 5.16(b). Con ayuda de la coálgebra de grafos lo transformemos en el circuito lógico (fig. 5.16, c). Coloremos los vértices del mografo y del grafo estructural que determinan el circuito lógico de salidas múltiples con dos colores: los vértices ponderados por las letras de entrada x_i, $\bar{x}_i$ sean blancos, los ponderados por las letras de salida f_i sean negros (en las figuras el rayado corresponde al color negro).

Al transformar el mografo $G^M(\{f_i\})$, que prefija el sistema de las funciones booleanas, en el grafo estructural $H(\{f_i\})$, sobre este último se pone la siguiente restricción: los elementos maximales del grafo estructural y sólo ellos, deben ser ponderados por las letras de salida f_i que no se desintegran con eso.

Representemos un sistema de funciones booleanas $f(x) = \{f_i\}$ en forma del modelo

$$\Psi_a = \langle M_a,\ p,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n \rangle,$$

donde $M_a = \{m_1, m_2, \ldots, m_n; m_{n+1}, \ldots, m_{n+k}\}$, $S_i \subset M_a^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, p es predicado monádico que parte M_a en dos subconjuntos:

$$p = \begin{cases} 0 \text{ sobre los elementos } m_i, \text{ cuando } i = 1, 2, \ldots, n, \\ 1 \text{ sobre los elementos } m_j, \text{ cuando } j = (n+1), \ldots, (n+k). \end{cases}$$

El grafo estructural $H(F(x))$ puede representarse en forma del modelo

$$\Psi_b = \langle M_b,\ \leqslant,\ q \rangle$$

donde

$$q = \begin{cases} 1, \text{ si de } p(m_i) \geqslant p(m_j) \text{ se deduce } m_i \geqslant m_j, \\ 0 \quad \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Investigar la transformación del modelo Ψ_a en el Ψ_b y la construcción del grafo estructural de salidas múltiples deben considerarse modelos con las siguientes restricciones

1) si en el modelo Ψ_a existen dos palabras μ_α y μ_β tales que $\mu_\alpha \subset \mu_\beta$, estas palabras se sustituyen por una palabra μ_α;

2) si la palabra tiene por lo menos dos letras iguales m_a y $m_b (m_a = m_b)$, una de ellas sustituye la otra;

3) si en el modelo Ψ_a existen al menos dos palabras μ_α y μ_β tales que

$$\mu_\alpha = \alpha m_r,\ \mu_\beta = \alpha m_t,$$

donde $p(m_r) = p(m_t) = 1$, α se compone de letras m_i, $p(m_i) = 0$, una de estas palabras sustituye la otra.

Obviamente, para que sea posible ordenar parcialmente las letras del modelo Ψ_a, es imprescindible que el mografo G^M no contenga figuras

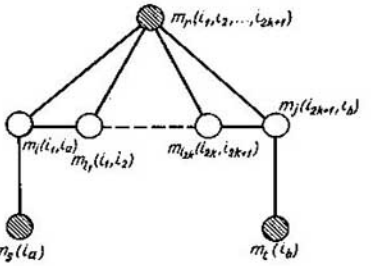


Fig. 5.17

prohibidas Q_A, Q_B (véase la fig. 5.11). En este caso es posible la ordenación parcial de las letras de los modelos Q_A, Q_B sin tener en cuenta el predicado q en el modelo Ψ_b.

Hallemos las figuras prohibidas en el mografo $G^M F(x))$ que caracterizan la fijación de los elementos maximales (minimales) en el grafo estructural correspondiente $H(F(x)$ durante la transformación $G^M F(x)) \rightarrow$ $\rightarrow H(F(X))$. Para ser más precisos, fijemos los elementos maximales que corresponden a los canales de salida del circuito lógico en proyección.

El siguiente teorema establece la condición de ordenación parcial de las letras de un modelo Ψ_a, en la cual se toman en consideración los elementos maximales dados.

Teorema 5.3. *Entre las letras de un modelo*

$$\Psi_a = \langle M_a,\ p,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n \rangle,$$

cuyo mografo G^M no contiene los mografos Q_A y Q_B *existe la relación de ordenación parcial si, y sólo si, el mografo* G^M *no contiene los subgrafos modelos* Q_E (fig. 5.17).

En lo principal, la complejidad de los circuitos lógicos se determina por la complejidad del grafo estructural correspondiente H. Por consiguiente, la minimización estructural de una función booleana f se determina por la distribución de figuras prohibidas Q_A y Q_B en el mografo $G^M(f)$, la minimización estructural de un sistema de funciones booleanas $\{f_i\}$, por la distribución de figuras prohibidas Q_A, Q_B, Q_E en el mografo $G^M(\{f_i\})$. De este modo, al circuito lógico mínimal le corresponderán aquellas FND de funciones booleanas, en las cuales es necesario realizar el número mínimal de desintegraciones de las termas primarias para que el mografo formado sea interpretable en categorías de grafos estructurales.

Analicemos la minimización estructural exacta de la función booleana f que se reduce al cubrimiento de la tabla semántica de profundidad igual a dos (fig. 5.18) y, si es imprescindible, a la coloración de los grafos que corresponden a los cubrimientos de la segunda tabla.

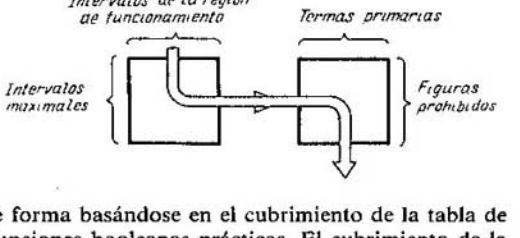


Fig. 5.18

La primera tabla se forma basándose en el cubrimiento de la tabla de distinciones para las funciones booleanas prácticas. El cubrimiento de la primera tabla genera una FND tope, a la cual corresponde el mografo G^M. Su transformación en el parcialmente ordenado, es decir, interpretable por el grafo estructural H, se cumple con ayuda del cubrimiento de la segunda tabla. Consideremos un ejemplo.

Ejemplo 5.3. Determinemos la complejidad del grafo (diagrama) estructural absolutamente minimal que realiza la función booleana $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 1, 2, 4, 9, 11, 13)$ y es igual a cero sobre los otros juegos.

Formemos intervalos maximales y construyamos la tabla de Quine para función considerada (tabla 5.6).

Tabla 5.6

Números de filas	Intervalos maximales	Puntos unitarios						
		0000	0001	0010	0100	1001	1011	1101
1	000—	V	V					
2	00—0	V		V				
3	0—00	V		—	V			
4	—001		V		—	V		
5	10—1					V	V	
6	1—01					V	—	V

En la tabla de Quine, el signo subrayado corresponde a un intervalo maximal obligatorio. (Un intervalo maximal es obligatorio si existe un punto unitario perteneciente a este, y sólo a este, intervalo). En conjunto de intervalos maximales obligatorios forma el núcleo del cubrimiento.

Hallamos las FND tope de la función dada cubriendo las columnas de la tabla de Quine por las filas de la tabla. Tenemos dos cubrimientos: las primera, segunda, tercera, quinta y sexta filas y las segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta filas. A estos dos cubrimientos les corresponden FNDT de la función f de tipo

$$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{x_1\bar{x}_2x_4}_{1} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_4}_{2} \vee$$

$$\vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}_{3} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4}_{4} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{5};$$

$$f''(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4.$$

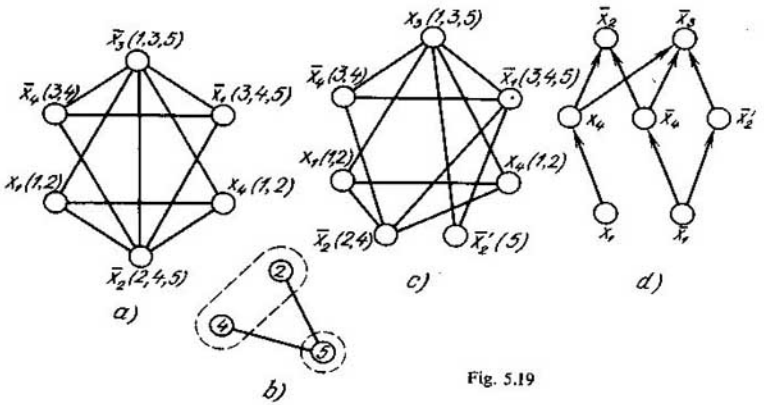


Fig. 5.19

A la FNDT le corresponde el mografo representado en la fig. 5.19, *a*. En este grafo se tienen ciclos de longitud impar con la permutación cíclica de pesos de la forma siguiente:

$Q_{A1} = \{\bar{x}_2(4, 5), \bar{x}_3(5, 3), \bar{x}_4(3, 4)\}$;

$Q_{A2} = \{x_1(1, 2), \bar{x}_2(2, 5), \bar{x}_3(5, 1)\}$;

$Q_{A3} = \{x_4(1, 2), \bar{x}_2(2, 5), \bar{x}_3(5, 1)\}$;

A la primera FNDT le corresponde la tabla semántica (tabla 5.7).

Tabla 5.7.

Q_i	$x_1(1, 2)$	$\bar{x}_2(4, 5)$	$\bar{x}_2(2, 5)$	$\bar{x}_3(3, 5)$	$\bar{x}_3(1, 5)$	$\bar{x}_4(3, 4)$	$x_4(1, 2)$
Q_1	0	1	0	1	0	1	0
Q_2	1	0	1	0	1	0	0
Q_3	0	0	1	0	1	0	1

Uno de los cubrimientos minimales es $\pi = \{\bar{x}_2(4, 5), \bar{x}_2(2, 5)\}$. Puesto que las transformaciones que lo integran desintegran las letras iguales en el sentido lexicográfico, construimos el grafo sobre las palabras {2, 4, 5} (fig. 5.19, *b*). Coloramos este grafo con dos colores: {2, 4} y {5}.

Por lo tanto, está lograda la desintegración minimal de letras. Después de rayar la letra $\bar{x}_2$ en la quinta palabra obtenemos FND interpretable en categorías del diagrama de Hasse de la complejidad 7 (fig. 5.19, *c*):

$$f'(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_2') = x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2'\bar{x}_3.$$

Al examinar de manera análoga los demás cubrimientos y la distribución de figuras prohibidas en el mografo de la segunda FND tope obtenemos que la FND a ordenar hallada es absolutamente minimal. Por lo tanto, la complejidad del diagrama que realiza esta función es también igual a 7 (fig. 5.19, *d*).

Citemos la solución exacta del problema de la minimización estructural del sistema de funciones booleanas basada en el uso de figuras prohibidas cuando el mografo se transforma en el diagrama con los elementos maximales fijados. Consiste en el cumplimiento de las siguientes etapas:

1. Empleando uno de los métodos conocidos se forma el conjunto de implicantes simples de salidas múltiples (ISSM) (intervalos maximales de salidas múltiples).

2. Se construye la tabla implicante de Quine, en la cual a toda fila le corresponden la ISSM, a la columna, las constituyentes de la unidad (o de la implicante) de funciones booleanas de partida $f_i(X) \in F(X)$. Además, la constituyente de la unidad (la implicante) entre en la tabla tantas veces, cuantas funciones tomen el valor unidad sobre ella.

3. Se hallan los cubrimientos de las columnas por las filas de la tabla implicante. De este modo se separan las FNDT de sistemas de funciones booleanas.

4. Para toda FNDT del sistema de funciones booleanas, a la cual corresponde el modelo Ψ_a, se construye una FND reticular (FNDR) del sistema de funciones booleanas de la complejidad minimal, es decir, se realiza la transformación $\Psi_a \to \Psi_b$.

5. De todas las FNDR del sistema de funciones booleanas se escoge la FNDR de complejidad minimal. Luego se construye el grafo estructural H de salidas múltiples.

Para eliminar todas las figuras prohibidas construyamos la tabla semántica R, a cada fila de la cual corresponde biunívocamente una letra (entre paréntesis se indican los identificadores de dos palabras que contienen esta letra durante la transformación de la figura prohibida), a cada columna le corresponde la figura prohibida Q_A, Q_B, Q_E;

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la letra correspondiente a la } i\text{-ésima fila integra} \\ & \text{la } j\text{-ésima figura;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

A las filas les corresponden las letras del modelo $m_i \in M_a$, para las cuales $p(m_i) = 0$. Entonces, el cubrimiento de las columnas por las filas en la matriz R corresponde al conjunto de letras que deben desintegrarse, si se realiza la transformación $\Psi_a \to \Psi_b$.

Ilustremos el método exacto de la minimización de sistemas de funciones booleanas teniendo en cuenta sus propiedades teóricas y estructurales.

Ejemplo 5.4. Sea prefijado el sistema de las funciones booleanas $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X), f_4(X)\}$ que depende de cinco variables (tabla 5.8). Formemos todas las ISSM, después construyamos la tabla de Quine y como resultado obtenemos dos FNDT del sistema dado:

$$F_1(X) = x_4x_5f_1 \vee xx_4f_2 \vee x_3x_5f_3 \vee \bar{x}_1x_2f_4 \vee x_1\bar{x}_2f_4 \vee x_2x_3f_4,$$

Tabla 5.8

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Examinemos la primera FNDT representándola en forma del modelo Ψ_a^1:

$M_o = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5, f_1, f_2, f_3, f_4\}$;

$p(x_1) = p(\bar{x}_1) = p(x_2) = p(\bar{x}_2) = p(x_3) = p(x_4) = p(x_5) = 0$,

$p(f_1) = p(f_2) = p(f_3) = p(f_4) = 1$.

Las palabras del modelo Ψ_a^1 corresponden a las conjunciones de la función $F_1(X)$. Construyamos el grafo modelo G^M (fig. 5.20, *a*). Enumeremos las figuras prohibidas que se comprenden en G^M:

$Q_{A1} = \{x_5(1, 4), x_4(1, 3), x_3(3, 4)\}$;

$Q_{A2} = \{x_5(2, 4), x_3(4, 7), x_2(2, 7)\}$;

$Q_{E3} \supset \{x_5(1, 4), x_4(1, 3)\}$; $Q_{E4} \supset \{x_5(1, 4), x_3(3, 4)\}$;

$Q_{E5} \supset \{x_5(2, 4), x_3(3, 4)\}$; $Q_{E6} \supset \{x_5(1, 4), x_3(4, 7)\}$;

$Q_{E7} \supset \{x_5(2, 4), x_3(4, 7)\}$; $Q_{E8} \supset \{x_5(2, 4), x_2(2, 5)\}$;

$Q_{E9} \supset \{x_5(2, 4), x_2(2, 7)\}$; $Q_{E10} \supset \{x_4(1, 3), x_3(3, 4)\}$;

$Q_{E11} \supset \{x_4(1, 3), x_3(3, 7)\}$; $Q_{E12} \supset \{x_2(2, 7), x_3(3, 7)\}$;

$Q_{E13} \supset \{x_2(2, 7), x_3(4, 7)\}$.

Los cubrimientos de la tabla semántica (tabla 5.9) son los conjuntos de palabras: {1, 2, 3, 8}, {1, 2, 3, 5, 6}, {1, 2, 4, 5, 6}, {1, 2, 4, 5, 8}, {3, 4, 6, 7, 8}, {1, 4, 5, 6, 7, 8}.

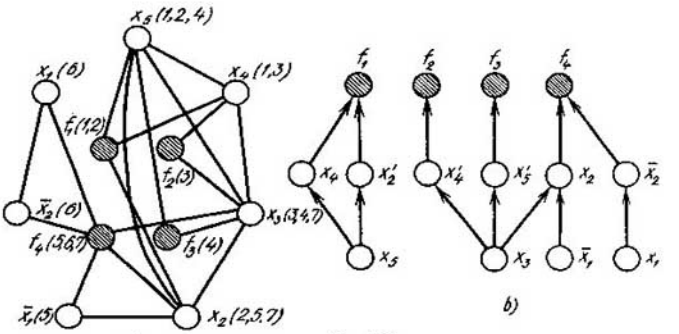


Fig. 5.20

Para las letras iguales en el sentido lexicográfico construyamos grafos sobre los conjuntos de palabras que contienen esas letras. Su coloración determina la extensión necesaria (ΔM_a) del portador M_a en cada caso concreto.

Tabla 5.9

Letras	Figuras prohibidas												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x_5(1, 4)$	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_5(2, 4)$	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
$x_4(1, 3)$	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$x_3(3, 4)$	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
$x_3(3, 7)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$x_3(4, 7)$	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
$x_2(2, 5)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$x_2(2, 7)$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

La potencia de la extensión del portador $|\Delta M_a|$ para cada uno de los cubrimientos es respectivamente igual a 3, 3, 3, 3, 3, 4. Por consiguiente, la complejidad minimal L del grafo estructural H es igual a 14 (fig. 5.20, *b*): $L = |M_a| + |\Delta M_a| = 14$. Consideremos el modelo $\Psi_a^{(2)}$ que corresponde a la segunda FNDT

$M_a = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5, f_1, f_2, f_3, f_4\}$;

$p(x_1) = p(\bar{x}_1) = p(x_2) = p(\bar{x}_2) = p(x_3) = p(x_4) = p(x_5) = 0$;

$p(f_1) = p(f_2) = p(f_3) = p(f_4) = 1$.

El mografo G^M (fig. 5.21, *a*) que define este modelo contiene figuras prohibidas de la siguiente forma:

$Q_{A1} = \{x_5(1, 4), x_4(1, 3), x_3(3, 4)\}$;

$Q_{B2} \supset \{x_5(1, 4), x_4(1, 3)\}$, $Q_{B3} \supset \{x_5(1, 4), x_3(3, 4)\}$;

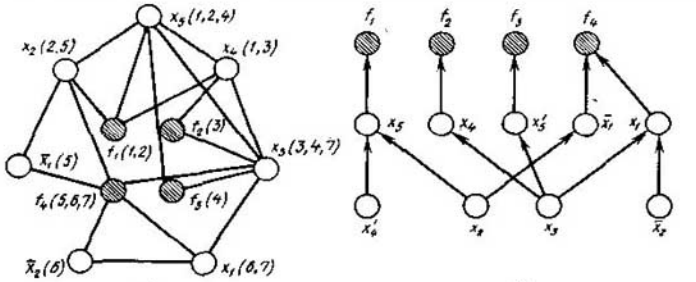


Fig. 5.21

$Q_{E4} \supset \{x_3(2, 4), x_3(3, 4)\}$, $Q_{E5} \supset \{x_3(1, 4), x_3(4, 7)3\}$;
$Q_{E8} \supset \{x_4(1, 3), x_3(3, 7)\}$, $Q_{E9} \supset \{x_3(2, 4), x_2(2, 5)\}$;

Cubriendo la tabla semántica (tabla 5.10) obtenemos que la extensión minimal del portador $|\Delta M|$ es igual a dos. La misma engendra el grafo estructural mínimal (fig. 5.21, *b*) que define el sistema dado de las funciones booleanas $F(X)$.

Tabla 5.10

Letras	Figuras prohibidas								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_3(1, 4)$	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$x_3(2, 4)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1
$x_4(1, 3)$	1	1	0	0	0	0	1	1	0
$x_3(3, 4)$	1	0	1	1	0	0	1	0	0
$x_3(3, 7)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$x_3(4, 7)$	0	0	0	0	1	1	0	0	0
$x_2(2, 5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Examinemos las funcionales de optimación para truncar variantes construidas teniendo en cuenta la estructura de figuras prohibidas. Investiguemos más detalladamente el proceso de reducción del mografo arbitrario a la forma ordenable.

El número de marcas de cada vértice v_i del mografo es igual a la frecuencia propia de la letra correspondiente del modelo y el número de marcas comunes para un par de vértices v_i y v_j (de la arista (i, j)) es igual al valor de la frecuencia mutua de letras correspondientes. Por lo tanto, la arista (i, j) del mografo puede caracterizarse por tres colores: f_i, f_j y f_{ij}, donde f_i es la frecuencia propia de la letra i, f_j es la frecuencia propia de la letra j, f_{ij} es la frecuencia mutua de las letras i y j $(i \neq j)$.

Observando el proceso de formación de las figuras prohibidas Q_A, $Q_Б$, Q_E notamos que cuanto mayor sea la suma $f_i + f_j$ de las frecuencias propias de las letras i y j para la frecuencia mutua dada f_{ij} o cuanto menor sea la frecuencia mutua f_{ij} de las letras i y j para la suma dada de sus propias frecuencias, tanto mayor será la probabilidad de que los submodelos tipos Q_A, $Q_Б$, Q_E contengan las letras i y j.

Caractericemos cada arista (i, j) de un mografo $\Psi(f)$ por el valor de la derivada de modelo calculada sobre el par correspondiente de letras:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial S}(i, j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}.$$

Entonces cuanto mayor sea el valor de la derivada, tanto mayor será el grado de participación desigual de las letras en las palabras, cuanto mayor es la heterogeneidad del mografo, tanto mayor será la probabilidad de formación de submodelos tipo Q_A, $Q_Б$, Q_E en este modelo, tanto más complicado (en el sentido del número de elementos) será el grafo sintetizado correspondiente a este modelo. Por eso estimemos el intervalo maximal I de la función f, al cual corresponde el subgrafo completo, por el valor medio $p(I)$ de la derivada calculada para cada arista de este subgrafo, es decir, por la expresión

$$p(I) = \frac{1}{r(r-1)} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}} \tag{5.1}$$

donde r es el rango de la implicante simple I (es igual al número de termas primarias que forman la implicante). Por tanto, la estimación (5.1) permite sintetizar las FND óptimas de la función booleana teniendo en cuenta sus propiedades teóricas y estructurales.

Empleando la funcional de optimación representada en forma de la estimación (5.1), pongamos el algoritmo aproximado de la minimización estructural de la función booleana.

1. Prefijamos la FND dada de la función f en forma de la matriz de incidencia Q.

2. Formamos las implicantes simples de la función f y las inscribimos en la lista I.

3. Construimos el núcleo de la función f. Si es vacío, pasamos al p. 6, en caso contrario, borramos elementos del núcleo de la lista I y pasamos al punto 4.

4. En la matriz Q, los intervalos unitarios de la función f, que se cubren por las implicantes simples borradas de la lista I, los sustituimos por estas mismas implicantes.

5. Si cualquier fila de la matriz Q es implicante simple, pasamos al p. 8, en caso contrario, al punto 6.

6. Según la matriz Q construimos la matriz de frecuencia de relaciones $F = Q^T \times Q$.

7. Conforme a (5.1) estimamos toda implicante simple de la lista I. Escogemos la implicante simple de la estimación minimal, la borramos de la lista I y pasamos al p. 4.

8. La matriz Q obtenida de la función booleana minimizada, teniendo en cuenta sus propiedades teóricas y estructurales.

Ejemplo 5.5. Tomando en consideración las propiedades teóricas y estructurales, minimizamos la función booleana $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee (2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15)$; sobre los otros juegos es igual a cero.

1. La matriz Q tiene forma

$$Q = \begin{array}{|cccccccc||c|} \hline x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline \end{array}.$$

2. La lista I de implicantes simples de la función booleana es la siguiente:

0 0 1 — 1 0 0 — 1 1 — 0
0 1 0 — — 0 1 1 1 — 1 1
— 1 0 0 1 0 — 1 1 1 1 —

3. La función f tiene un núcleo compuesto de las implicantes simples obligatorias 0 1 0 —, 0 0 1 — y 1 0 0 —. Después de borrar los elementos del núcleo, la lista I toma la forma

— 1 0 0 1 1 — 0
— 0 1 1 1 — 1 1
1 0 — 1 1 1 1 —

4. Como resultado de la sustitución correspondiente de las filas, la matriz Q tiene siguiente forma

$$Q' = \begin{array}{|cccccccc||c|} \hline x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,1\,— \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\,1\,0\,— \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\,0\,0\,— \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline \end{array}.$$

5. Las filas de la matriz Q', de la cuarta a la séptima, no corresponden a las implicantes simples, por eso pasamos al punto 6.

6. La matriz de frecuencia de la relación F' ($F' = (Q')^T \times Q'$) correspondiente a la matriz Q' es tal:

$$F' = \begin{array}{|cccccccc|c} x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ \hline 5 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & \underline{x}_1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \underline{\bar{x}}_1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & \underline{x}_2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & \underline{\bar{x}}_2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & \underline{x}_3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & \underline{\bar{x}}_3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & \underline{x}_4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & \underline{\bar{x}}_4 \end{array}.$$

7. Estimamos cada implicante simple de la lista obtenida en el punto 3. En virtud de (5.1) tenemos

$$p(-1000) = p(x_2\bar{x}_3\bar{x}_4) = \frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{4-2\cdot 2+3}{2} + \frac{4-2\cdot 2+2}{2} + \frac{3-2\cdot 1+2}{2}\right) \approx 0{,}91;$$

$p(-\ 0\ 1\ 1) \approx 0{,}91$; $p(1\ 0\ -\ 1) \approx 1{,}98$; $p(1\ -\ 1\ 1) \approx 0{,}58$;

$p(1\ 1\ -\ 0) \approx 0{,}58$; $p(1\ 1\ 1\ -) \approx 0{,}67$.

Escogemos la implicante simple 1 1 — 0 y pasamos al punto 4.

4. En la matriz Q', las constituyentes de la unidad de la función f, que se cubren por la implicante 1 1 — 0, las sustituimos por esta misma implicante. Como resultado obtenemos la matriz

$$Q'' = \begin{array}{|cccccccc|c} x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\ 0\ 1\ - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\ 1\ 0\ - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\ 0\ 0\ - \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\ 1\ -\ 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 15 \end{array}.$$

5. La matriz Q comprende las constituyentes de la unidad de la función que no son implicantes simples. Pasamos al punto 6.

6. La matriz de frecuencia de la relación F'' correspondiente a Q'' tiene forma

$$F'' = \begin{array}{|cccccccc|c} x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ \hline 4 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & \underline{x}_1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \underline{\bar{x}}_1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{x}_2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & \underline{\bar{x}}_2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & \underline{x}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \underline{\bar{x}}_3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & \underline{x}_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{\bar{x}}_4 \end{array}.$$

7. Según la fórmula (5.1) estimamos las implicantes simples de la lista I que cubren las demás constituyentes de la unidad de la función f. Tenemos

$p(-\ 0\ 1\ 1\ 1) \approx 0{,}75$; $p(1\ -\ 1\ 1) \approx 0{,}5$; $p(1\ 0\ -\ 1) \approx 0{,}91$;

$p(1\ 1\ 1\ -) \approx 1{,}16$. Escogemos la implicante simple 1 — 1 1 y pasamos al punto 4.

4. Después de la sustitución correspondiente de las filas obtenemos la matriz

$$Q'' = \left\| \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,1\,— \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\,1\,0\,— \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\,0\,0\,— \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\,1\,—\,0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\,—\,1\,1 \end{array} \right\|$$

5. Cualquier fila de la matriz Q'' corresponde a una implicante simple. Pasamos al punto 8. Realizamos el punto 5 utilizando la siguiente posición. Si la constituyente de la unidad de la función f es una implicante simple, se contiene en el núcleo del cubrimiento. De aquí, si en el punto 4 no ha cambiado ninguna fila de la matriz, pasamos al punto 8.

8. La matriz Q'' representa la función booleana f minimizada, teniendo en cuenta sus propiedades teóricas y estructurales.

Empleando el método de la equivalentización semántica establezcamos qué lejos está la FNDT obtenida de la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de la FNDT de la función f que corresponde al grafo estructural mínimal. Hallemos todas las FND tope de la función f. Para hacerlo construyamos la tabla implicante y determinemos sus cubrimientos. Representemos toda FNDT de la función f en forma de mografo. Formemos figuras prohibidas de los tipos A y Б y construyamos las tablas semánticas. Luego hallemos y estimemos sus cubrimientos. Resultará que la FND tope obtenida con ayuda del algoritmo propuesto de minimización, libre del sondeo de todas las FND tope, corresponde a la solución absolutamente mínimal.

Analicemos la minimización estructural del sistema de funciones booleanas $F(X)$. En este caso, a toda implicante simple de salidas múltiples, igual que a la implicante simple en la minimización de una función booleana, le corresponde un subgrafo completo, cuyos vértices están ponderados por el identificador de esta ISSM en el mografo G^M. En el caso considerado, el cálculo de la distribución de figuras prohibidas puede estimarse por la expresión (5.1). Al mismo tiempo, se calculan las derivadas sólo para los arcos que unen los vértices ponderados por las letras m_i y m_j para los cuales $p(m_i) = p(m_j) = 0$. Para simplificar, en la expresión (5.1) omitamos el componente constante de frecuencia y estimemos la ISSM por la siguiente fórmula:

$$c(I) = \frac{1}{r(r-1)} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} \frac{f_i + f_j}{f_{ij}} \right). \tag{5.2}$$

Propongamos el siguiente procedimiento de minimización de sistemas de funciones booleanas teniendo en cuenta sus propiedades teóricas y estructurales. Este procedimiento se basa en la aplicación de la funcional de optimación.

1. Prefijamos el sistema de las funciones booleanas $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)\}$ por conjuntos M_i^1, M_i^0. Con ello,

$$f_i(X) = \begin{cases} 1 \text{ sobre los elementos de } M_i^1, \\ 0 \text{ sobre los elementos de } M_i^0. \end{cases}$$

2. Hallamos todas las ISSM de las funciones booleanas por uno de los procedimientos conocidos del sistema y las inscribimos en la lista I.

3. Construimos la matriz Q, a cada columna de la cual corresponde la terma primaria, a la fila, la constituyente de la unidad (implicante) de la función $f_i(X) \in F(X)$ y

$$q_{kl} = \begin{cases} 1, \text{ si } x_k \text{ integra } l\text{-ésima constituyente (implicante);} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

4. Determinamos las ISSM obligatorias en la lista I. Si ellas existen, pasamos al punto 5 borrando las implicantes obligatorias de la lista I. En caso contrario, pasamos al punto 7.

5. Hacemos correcciones en la matriz Q sustituyendo las constituyentes de la unidad que se cubren por las ISSM borradas, por esas mismas ISSM.

6. Si cualquier fila de la matriz Q es una ISSM, pasamos al p. 9, en caso contrario al punto 7.

7. Según la matriz Q construimos la matriz de frecuencia de relaciones $F = Q^T \times Q$.

8. Estimamos cada ISSM calculando el valor de $c(I)$. Escogemos la ISSM con el valor minimal $c_{\min}(I)$. Borramos la ISSM escogida de la lista I y pasamos al punto 5.

9. La matriz Q prefija el sistema minimizado de las funciones booleanas $F(X)$ tomando en consideración las propiedades teóricas y estructurales.

Ejemplo 5.6. Prefijado (tabla 5.11) el sistema de las funciones booleanas $Fx = \{f_1(X), f_2(X), f_3(X)\}$.

Tabla 5.11

1	x_4	x_3	x_2	x_1	f_1	f_2	f_3
	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	1	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	1	1	0	1
	0	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	0	0	1
	0	1	1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	0	0
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1	0	0
	1	0	1	0	0	1	1
	1	0	1	1	1	0	1
	1	1	0	0	1	1	1
	1	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	0	1

2. La lista I de las implicantes simples de salidas múltiples del sistema $F(x)$ es la siguiente:

$I_1 = 0\ 0\ —\ —$ (3), $I_2 = 0\ —\ 0$ (3),

$I_3 = —\ —\ 0\ 0$ (1), $I_4 = —\ 0\ 1\ —$ (3), $I_5 = -1\ 0\ —$ (3),

$I_6 = 1 - 0 - (1)$, $I_7 = 1 - - 0$ (2), $I_8 = - - 1\ 1$ (1),
$I_9 = 1 - - 1$ (1), $I_{10} = 1 - - 1 -$ (3), $I_{11} = 1\ 1 - -$ (3),
$I_{12} = 1\ 1 - 1$ (1, 3), $I_{13} = 1 - 1\ 1$ (1, 3), $I_{14} = 1\ 1 - 0$ (2, 3),
$I_{15} = 1\ 1\ 0 -$ (1, 3), $I_{16} = 1 - 1\ 0$ (2, 3), $I_{17} = - 0\ 1\ 1$ (1, 3),
$I_{18} = 1 - 0\ 0$ (1,2), $I_{19} = - 1\ 0\ 0$ (1, 3),$I_{20} = 0 - 0\ 0$ (1, 3),
$I_{21} = 1\ 1\ 0\ 0$ (1, 2, 3).

Entre paréntesis se indican los números de las funciones, cuyos puntos de trabajo se cubren por el intervalo correspondiente.

3. Componemos la matriz Q, en la cual cada constituyente de la unidad se repite tantas veces cuantas integre las funciones booleanas.

4. La ISSM obligatoria es la implicante I_8.

5. En la matriz Q sustituimos las filas 0 0 1 1, 0 1 1 1, 1 0 1 1, 1 1 1 1 que corresponden a las constituyentes de la función booleana f_1 por la implicante simple de salidas múltiples I_8. Como resultado obtenemos la matriz:

$$Q^{(1)} = \begin{array}{|cccccccc|} \bar{x}_4 & x_4 & \bar{x}_3 & x_3 & \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_1 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

6. Las filas de la matriz, de la 1 – a a la 22 – a, no son ISSM. Pasamos al punto 7.

7. La matriz de frecuencia de relaciones tiene forma

$$F = \begin{array}{|cccccccc|c} x_1 & \bar{x}_1 & x_2 & \bar{x}_2 & x_3 & \bar{x}_3 & x_4 & \bar{x}_4 & \\ 9 & 0 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 3 & x_1 \\ 0 & 14 & 5 & 9 & 7 & 7 & 9 & 5 & \bar{x}_1 \\ 4 & 5 & 9 & 0 & 3 & 5 & 6 & 3 & x_2 \\ 5 & 9 & 0 & 14 & 8 & 6 & 8 & 6 & \bar{x}_2 \\ 4 & 7 & 3 & 8 & 11 & 0 & 8 & 3 & x_3 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & 0 & 11 & 6 & 5 & \bar{x}_3 \\ 5 & 9 & 6 & 8 & 8 & 6 & 14 & 0 & x_4 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 3 & 5 & 0 & 8 & \bar{x}_4 \end{array}.$$

8. Estimamos cada ISSM calculando el valor de $c(I)$. Para la implicante $I_3 = - - - 0\ 0\ (1)$ esta estimación es minimal e igual a 1,55. Escogemos $I_3 = - - - 0\ 0\ (1)$ y pasamos al punto 5.

5. En la matriz $Q^{(1)}$, las constituyentes de la unidad, cubiertas por la implicante I_3, las sustituimos por esta misma implicante. Como resultado obtenemos la matriz

$$Q^2 = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| .$$

6. La matriz $Q^{(2)}$ contiene filas que no son ISSM. Pasamos al punto 7, etc. Resulta la matriz

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \bar{x}_4 & x_4 & \bar{x}_3 & x_3 & \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| ,$$

que corresponde a la solución

$$F(X) = x_1x_2f_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2f_1 \vee \bar{x}_2x_4f_1 \vee \bar{x}_1x_4f_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4f_3 \vee x_2x_3f_3 \vee x_3x_4f_3.$$

Determinemos la distancia entre la solución obtenida y la minimal. Para esto prefijemos cada FNDT de este sistema por el mografo y determinemos la distribución de figuras prohibidas. Haciendo los mografos obtenidos equivalentes de modo semántico a los mografos interpretados en categorías de grafos estructurales, obtenemos que la FNDT sintetizada del sistema de funciones booleanas $F(X)$ corresponde a la solución absolutamente minimal sin realizar el sondeo de todas las FNDT equivalentes.

§ 5.4. Caracterización de la descomposición del grafo de transiciones en el producto cartesiano parcial

La complejidad y la seguridad del dispositivo automático se determinan en muchos aspectos por los códigos de estados interiores. Uno de los problemas actuales es el de minimización de conexiones entre los elementos de memoria. Consideremos dos elementos de memoria *inconexos* si la función de excitación de uno de ellos no depende del estado del otro elemento de memoria y viceversa. En caso de la inconexión de un elemento de memoria con los demás, su función de excitación se determina por el estado de este elemento y por el vector de entrada:

$$\varphi_i = \varphi_i(Z_i^+ X).$$

Caracterizaremos la memoria del dispositivo automático por su conexión

$$S = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$$

donde s es el número total de los elementos de memoria, α_i es el número de elementos de memoria, distintos del i-ésimo elemento, cuyos valores son necesarios para calcular la función de excitación del i-ésimo elemento de memoria.

El valor de la conexión de memoria S, igual a cero, significa que los elementos de memoria son funcionalmente inconexos y la función de excitación de cualquier elemento de memoria se determina por su valor y por el vector de entrada.

Examinemos el problema de descomposición de un grafo arbitrario de transiciones en el producto cartesiano parcial de n factores funcionalmente inconexos uno con otro, cada uno de los cuales corresponde a un dispositivo subautomático. La conexión funcional entre los bloques surge cuando es infringido el carácter determinado por lo menos en un grafo de transiciones G_i. Para describir las situaciones de infracción del carácter determinado introduzcamos el grafo de enganche G_{en}, a cada vértice del cual le corresponde biunívocamente un estado interior del dispositivo automático a la arista, un par de estados enganchados con la particularidad de que cada arista está ponderada mediante los vectores de entrada que enganchan los estados correspondientes del dispositivo automático.

Dos estados S_α, S_β se denominan *enganchados*, si existen: un juego X_i que transforma el estado S_α en S_γ, $S_\alpha \xrightarrow{X_i} S_\gamma$, y un juego X_j, $X_i \subset X_j$, que transforma S_β en S_δ, $S_\beta \xrightarrow{X_j} S_\delta$, tales que $S_\gamma \neq S_\delta$ y (S_α, S_γ) y (S_β, S_δ) no forman lazos simultáneamente.

El estado del grafo de transiciones $G = \langle V, (U, X)\rangle$ después de su descomposición en el producto cartesiano parcial $G = \prod_i G_i$

$G_i = \langle V_i, (U_i, X)\rangle$

puede caracterizarse por un vector a i-ésimo orden del cual le corresponde el estado del i-ésimo dispositivo subautomático. En la descomposición cada uno de los dispositivos subautomáticos se caracteriza por el número tolerable de estados $|V_i|$. Es obvio que

$$\prod_i |V_i| \geqslant |V|.$$

A los estados enganchados les deben corresponder los vectores distintos uno de otro en cada orden. En caso contrario, si en j-ésimo orden los vectores de estados enganchados coinciden al transmitir a la entrada del dispositivo automático un vector X, por el cual ellos se enganchan, en el caso general, será infringido el carácter determinado de transición en este dispositivo subautomático. Por lo tanto, la construcción de la descomposición paralela abstracta del dispositivo automático se reduce a la coloración de componentes múltiples (multicoloración) del grafo de enganche, realizando la cual a los vértices adyacentes se les ponen en correspondencia los espectros de colores, distintos uno de otro, en todo componente.

La descomposición del grafo de transiciones en el producto cartesiano parcial no saca el grafo resultante de la clase de los grafos de transiciones. Las figuras prohibidas de esta semántica son los grafos casi completos.

Teorema 5.4. *Si un grafo de enganche construido para cada uno de los dispositivos subautomáticos no contiene grafo casi completo de la casi densidad $q + 1$, el dispositivo automático correspondiente es descomponible en el producto cartesiano parcial de los factores funcionalmente inconexos entre ellos, o sea, de los dispositivos subautomáticos, el número de estados de cada uno de los cuales no supera q.*

De este modo, los grafos casi completos son las figuras prohibidas que caracterizan la condición suficiente de la inconexión funcional de subautómatas, cuando se busca la descomposición paralela del autómata de mando. A continuación, esta clase de figuras prohibidas se designará mediante Q_{zh}. Al mismo tiempo el grafo de enganche para el primer dispositivo subautomático a examinar es un grafo de enganche construido por el grafo de transiciones según su definición. El grafo de enganche del i-ésimo dispositivo subautomático es un grafo de enganche del primer dispositivo subautomático, en el cual se han añadido aristas que unen los vértices de espectro igual de colores. Estas aristas se añaden para identificar unívocamente los estados del dispositivo automático.

Analicemos la construcción de la descomposición paralela abstracta del dispositivo automático basada en la semántica hallada, examinando el ejemplo siguiente.

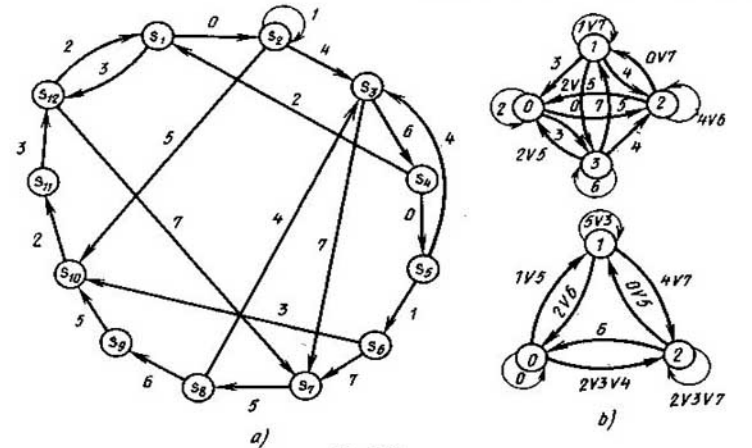


Fig. 5.22

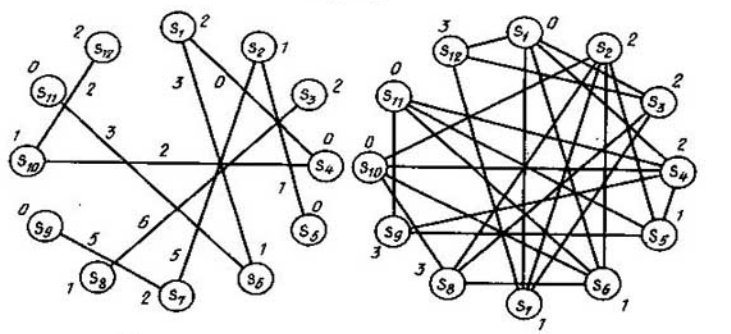


Fig. 5.23

El dispositivo automático tiene tres canales de entrada. El grafo de transiciones está representado en la fig. 5.22, *a*. Los vectores de entrada se denotan por los equivalentes decimales de los correspondientes juegos binarios. Hallemos la descomposición paralela del dispositivo automático en forma de dos dispositivos con el número de estados interiores igual a 3 y 4, respectivamente.

En la fig. 5.23, *a* se da el grafo de enganche del primer dispositivo subautomático. No contiene figuras prohibidas; por consiguiente, es posible colorarlo con tres colores {0, 1, 2}. Cada color corresponde a un estado del primer dispositivo subautomático. Construimos su grafo de transiciones $G_1 = \langle V_1, (U_1, X) \rangle$. Como resultado de la coloración del grafo G_{en}, el conjunto de estados del dispositivo automático inicial se parte en tres conjuntos concolo-

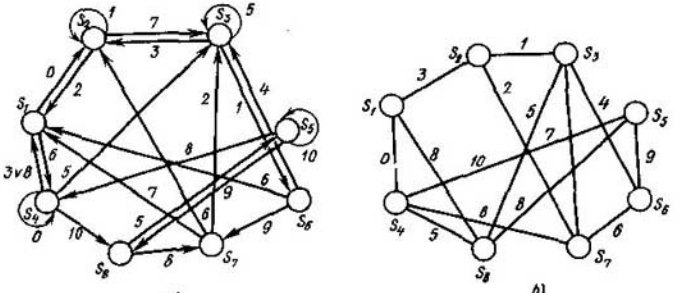


Fig. 5.24

reados, cada uno de los cuales corresponde al estado del primer dispositivo subautomático. Los designaremos por S'_{i0}, S'_i, S'_{i2}. Tenemos: $\{S_4, S_5, S_9, S_{11}\} = S'_{10}$; $\{S_2, S_6, S_8, S_{10}\} = S'_{11}$; $\{S_1, S_3, S_7, S_{12}\} = S'_{12}$. De aquí se tiene que las condiciones de la transición $\varphi_{i\to j}$ del estado S'_i en el estado S'_j ($i, j = 0, 1, 2$) del primer bloque son las condiciones de la transición del estado $S_\alpha \in S'_i$ al estado $S_\beta \in S'_j$ que se determinan por el grafo inicial de transiciones: $\varphi_{0\to 0} = 0$, $\varphi_{0\to 1} = 1 \vee 5$, $\varphi_{0\to 2} = 2 \vee 3 \vee 4$; $\varphi_{1\to 1} = 3 \vee 5$, $\varphi_{1\to 0} = 2 \vee 5$; $\varphi_{1\to 2} = 4 \vee 7$; $\varphi_{2\to 2} = 1 \vee 3 \vee 5$, $\varphi_{2\to 0} = 6$, $\varphi_{2\to 1} = 0 \vee 5$.

El grafo de enganche que corresponde al segundo bloque está representado en la fig. 5.23, *b*. No contiene figuras prohibidas; por consiguiente, el dispositivo automático inicial es realizable en forma de dos dispositivos subautomáticos funcionalmente inconexos que funcionan en paralelo. La coloración del segundo grafo de enganche parte el conjunto de estados del dispositivo automático de partida en cuatro conjuntos siguientes:

$$S_{20} = \{S_1, S_{10}, S_{11}\},\ S_{21} = \{S_3, S_6, S_7\},$$
$$S_{22} = \{S_2, S_3, S_4\},\ S_{23} = \{S_8, S_9, S_{12}\}.$$

Para los estados del segundo dispositivo automático las funciones de transición tienen siguiente forma: $\varphi_{0\to 0} = 2$, $\varphi_{0\to 2} = 0$, $\varphi_{0\to 3} = 3$, $\varphi_{1\to 1} = 1 \vee 7$, $\varphi_{1\to 0} = 3$, $\varphi_{1\to 2} = 4$, $\varphi_{1\to 3} = 5$, $\varphi_{2\to 2} = 4 \vee 6$, $\varphi_{2\to 0} = 2 \vee 5$, $\varphi_{2\to 1} = 0 \vee 7$, $\varphi_{3\to 3} = 6$, $\varphi_{3\to 0} = 2 \vee 5$, $\varphi_{3\to 1} = 7$, $\varphi_{3\to 2} = 4$.

En la fig. 5.22, *b* se ofrece la descomposición del grafo dado de transiciones en factores funcionalmente inconexos.

Construyamos la descomposición abstracta del dispositivo automático utilizando la semántica de la descomposición del grafo de transiciones en el producto de factores. Sea prefijado el grafo de transiciones G (fig. 5.24, *a*) que debe descomponerse en el producto $G = G_1 \times G_2$, donde G_1 y G_2 son los grafos de transiciones, la potencia del portador de cada uno de éstos no supera 3.

Construyamos el grafo de enganche G_{en} y realicemos su coloración por el primer componente (fig. 5.24, *b*). Para ello formemos todos los subgrafos vacíos $\{S_2, S_4, S_6\}$, $\{S_3, S_4\}$, $\{S_1, S_6\}$, $\{S_1, S_3, S_5\}$, $\{S_1, S_2, S_7\}$, $\{S_2, S_5\}$, $\{S_2, S_6, S_8\}$, $\{S_7, S_8\}$ del grafo de enganche.

Tabla 5.12

Portadores de subgrafos vacíos	Vértices							
	S_1	S_2	S_3	S_6	S_5	S_4	S_8	S_7
$\{S_1, S_5, S_7\}$	1	0	0	0	1	0	0	1
$\{S_1, S_3, S_5\}$	1	0	1	0	1	0	0	0
$\{S_1, S_6\}$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\{S_2, S_4, S_6\}$	0	1	0	1	0	1	0	0
$\{S_2, S_6, S_8\}$	0	1	0	1	0	0	1	0
$\{S_2, S_5\}$	0	1	0	0	1	0	0	0
$\{S_3, S_4\}$	0	0	1	0	0	1	0	0
$\{S_7, S_8\}$	0	0	0	0	0	0	1	1

Cubrimos las columnas por las filas de la tabla (tabla 5.12), en la cual a cada fila le corresponde biunívocamente un subgrafo vacío, a la columna, un vértice, y en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna se halla 1, si el j-ésimo vértice se contiene en el portador del i-ésimo subgrafo vacío y 0 en caso contrario. El número de estados tolerables del grafo G_1 no supera tres; por lo tanto, la potencia del cubrimiento de esta tabla tampoco debe ser más que tres. El grafo de enganche no contiene figuras prohibidas por el primer componente (grafos casi completos de la casi densidad 4); por consiguiente, tales cubrimientos existen, ya que el número cromático del grafo es igual a su casi densidad. Estos cubrimientos tienen siguiente forma:

$$\pi_1 = \{\{S_2, S_4, S_6\}, \{S_1, S_3, S_5\}, \{S_7, S_8\}\},$$
$$\pi_2 = \{\{S_1, S_5, S_7\}, \{S_2, S_6, S_8\}, \{S_3, S_4\}\}.$$

Para ser precisos escojamos el primer cubrimiento. Le corresponde la coloración del grafo de enganche representada en la fig. 5.25, *a*. En virtud de esta coloración, las funciones de transiciones φ_{ijk}, donde i es el número del componente de la descomposición, j es el estado (color), al cual se realiza la transición del primer factor del grafo de transiciones G_1, tienen siguiente forma: $\varphi_{100} = 0 \vee 1$, $\varphi_{101} = 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6$, $\varphi_{102} = 9 \vee 10$, $\varphi_{110} = 1 \vee 3 \vee 7 \vee 8 \vee 0$, $\varphi_{111} = 5 \vee 10$, $\varphi_{112} = 4 \vee 9$, $\varphi_{120} = 6$, $\varphi_{121} = 2 \vee 5 \vee 7$, $\varphi_{122} = 8$.

Para que el producto de grafos satisfaga la condición de autómata, antes de colorar el grafo de enganche por el segundo componente es necesario unir los vértices, concoloreados en el primer componente, por aristas (fig. 5.25, *b*). Para establecer si el grafo obtenido (fig. 5.25, *c*) contiene figuras prohibidas, formemos subgrafos completos de densidad 4. Volvamos a utilizar el algoritmo dado anteriormente. Lo modifiquemos de tal modo que en el nivel se hallen situados los vértices no adyacentes que, al mismo tiem-

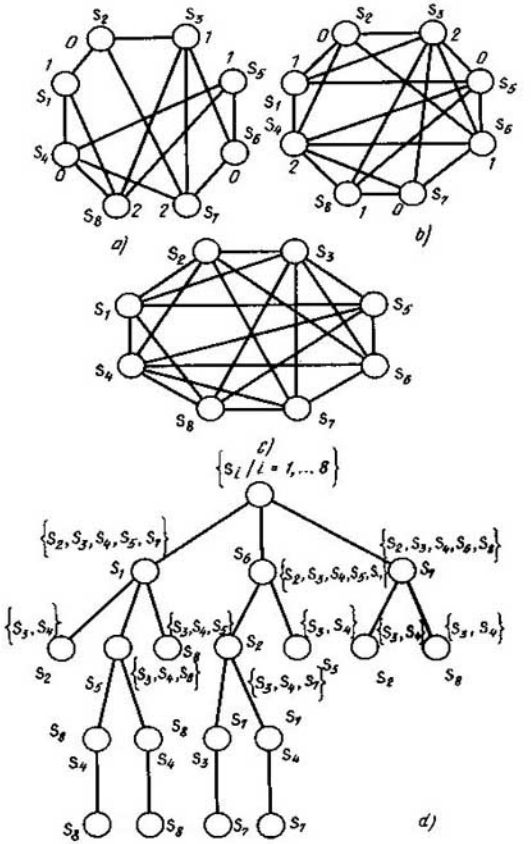


Fig. 5.25

po, se ponderan por los vértices adyacentes. Rompamos los caminos, cuya longitud es menos que cuatro (fig. 5.25, *d*). Además de los subgrafos completos formados de densidad 4, cuyos portadores tienen respectivamente forma de $\{S_1, S_3, S_5, S_8\}$, $\{S_1, S_4, S_5, S_8\}$, $\{S_2, S_3, S_6, S_7\}$, $\{S_2, S_4, S_6, S_7\}$, el grafo de enganche, al realizar la coloración por el segundo componente, contiene otras seis figuras prohibidas: grafos casi completos de casi densidad 4 (fig. 5.26).

Construyamos la tabla semántica (tabla 5.13). A cada fila de ésta le

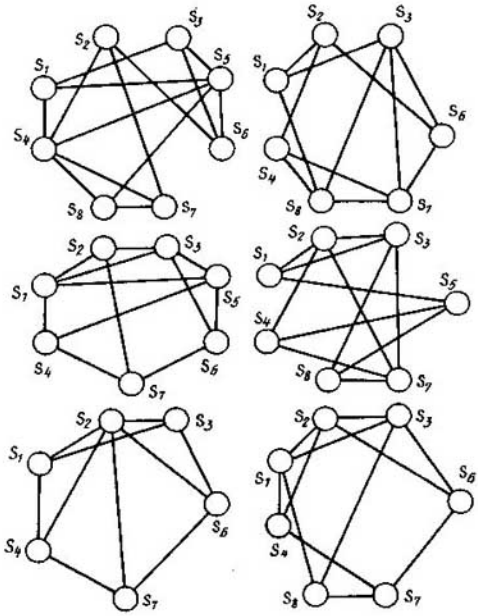


Fig. 5.26

corresponde biunívocamente una arista de figura prohibida, a cada columna, una figura prohibida y

$$(i,\ j) = \begin{cases} 1, & \text{si la } i\text{-ésima arista se contiene en la } j\text{-ésima figura;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Tabla 5.13

Aristas	Grafos casi completos de la casi densidad 4									
$[S_1, S_4]$	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
$[S_1, S_5]$	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
$[S_1, S_8]$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$[S_4, S_8]$	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$[S_4, S_5]$	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
$[S_5, S_8]$	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
$[S_2, S_7]$	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
$[S_2, S_3]$	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
$[S_2, S_6]$	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
$[S_3, S_7]$	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
$[S_6, S_7]$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0

Aristas	Grafos casi completos de la casi densidad 4									
$\{S_3, S_6\}$	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
$\{S_2, S_4\}$	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
$\{S_3, S_8\}$	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
$\{S_3, S_5\}$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
$\{S_5, S_6\}$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$\{S_4, S_7\}$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
$\{S_1, S_3\}$	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
$\{S_7, S_8\}$	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
$\{S_1, S_2\}$	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
$\{S_4, S_6\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

La tercera y la séptima fila forman el cubrimiento minimal. Por consiguiente, eliminando del grafo de enganche sus aristas correspondientes $\{S_1, S_8\}$ y $\{S_2, S_7\}$ es posible la coloración del grafo mediante tres colores (véase la fig. 5.25, *b*). Como resultado obtenemos la coloración de dos componentes del grafo de enganche (véase la fig. 5.25, *a, b*): S_1: (1, 1), S_2: (0, 0), S_3: (1, 2), S_4: (0, 2), S_5: (1, 0), S_6: (0, 1), S_7: (2, 0), S_8: (2, 1).

La eliminación de las aristas $\{S_1, S_8\}$ y $\{S_2, S_7\}$ significa que los estados S_1 y S_8 del grafo inicial de transiciones no deben engancharse por el vector de entrada **8** (véase la fig. 5.25, *a*) y los estados S_2 y S_7, por el vector **2**. Para desenganchar esos vectores, en las correspondientes cuatro transiciones introduzcamos órdenes complementarios, según los cuales se distinguirán estos vectores. Es posible realizarlo usando las conexiones entre los componentes (en el caso dado, el estado del primer componente) o formando un bloque desacoplador especial de memoria.

En el primer componente del espectro, a los estados S_1 y S_8 se les han puesto en correspondencia los colores *1* y *2*, respectivamente. Para desenganchar estos estados, extendamos el vector **8** que pondera la transición del estado S_1 hasta el vector $\mathbf{8}' = \mathbf{8}\cdot\tilde{S}_{11}$; el vector **8** que pondera la transición del estado S_8 lo extendamos hasta el vector $\mathbf{8}'' = \mathbf{8}\cdot\tilde{S}_{12}$, donde $\tilde{S}_{11}$, $\tilde{S}_{12}$ son valores de los órdenes, en los cuales se difieren los códigos de los colores *1* y *2* del primer componente del espectro (fig. 5.27, *a*). Para desenganchar los estados S_2 y S_7 tenemos $\mathbf{2}' = \mathbf{2}\cdot\tilde{S}_{10}$; $\mathbf{2}'' = \mathbf{2}\cdot\tilde{S}_{12}$, respectivamente.

En este caso, el bloque especial de memoria es un elemento de memoria α (fig. 5.27, *b*), en el cual uno de los estados (por ejemplo, nulo) se pone en correspondencia a los estados S_1 y S_2, el otro, a los estados S_8 y S_7. En este caso, $\mathbf{8}' = \mathbf{8}\alpha$, $\mathbf{8}'' = \mathbf{8}\alpha$, $\mathbf{2}' = \mathbf{2}\alpha$, $\mathbf{2}'' = \mathbf{2}\alpha$. El valor del bloque desacoplador especial de memoria se fija realizando la transición al estado, la salida, del cual es de caráter unívoco, lo que se determina por el estado de este bloque.

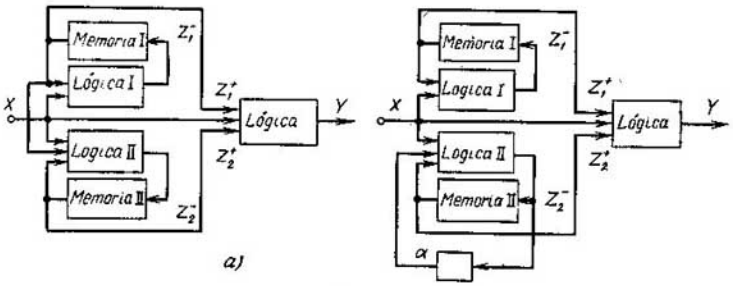


Fig. 5.27

Como resultado obtenemos las siguientes funciones de excitación del grafo de transiciones que determina el segundo factor de la descomposición:

$\varphi_{200} = 1 \vee 6 \vee 10$, $\varphi_{201} = 2' \vee 7 \vee 9$, $\varphi_{202} = 2'' \vee$
$\vee 3 \vee 8$, $\varphi_{210} = 0 \vee 5 \vee 8'' \vee 9$, $\varphi_{211} = 6$,
$\varphi_{212} = 3 \vee 4 \vee 8'$, $\varphi_{220} = 7$, $\varphi_{221} = 1 \vee 4 \vee 6$,
$\varphi_{222} = 0 \vee 5$.

La descomposición paralela abstracta obtenida del dispositivo automático prefijado con los factores conexos está representada en la fig. 5.28.

Para responder si es posible la descomposición del dispositivo automático a examinar en el producto cartesiano parcial de los factores inconexos entre ellos, consideremos la coloración del grafo de enganche teniendo en cuenta el carácter de transiciones de estados enganchados, lo que permite no tomar en consideración la conexión en el grafo de enganche, si la transición se realiza de los correspondientes estados enganchados a los vértices concoloreados. Por lo tanto, antes de extender el vector de entrada para desenganchar los estados interiores es necesario comprobar la posibilidad de eliminar esta conexión mediante la coloración igual de aquellos estados, a los cuales pasan los estados enganchados.

Construyamos la tabla de transiciones del dispositivo automático prefijado (tabla 5.14), a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente un valor del vector de entrada, a cada columna, un estado interior, y en la célula (i, j) de la tabla se sitúa el identificador del estado interior, al cual pasa el dispositivo automático del j-ésimo estado bajo la influencia del i-ésimo vector de entrada.

La descomposición inconexa tiene lugar si, debido al cubrimiento de la tabla semántica, la conexión de los pares $\{S_1, S_8\}$ y $\{S_2, S_7\}$ no se tiene

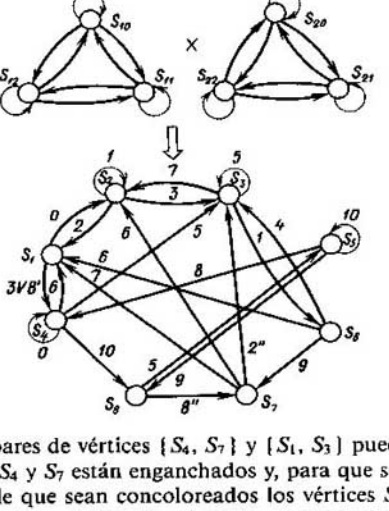


Fig. 5.28

en cuenta en virtud de que los pares de vértices $\{S_4, S_7\}$ y $\{S_1, S_3\}$ pueden ser concoloreados. Los estados S_4 y S_7 están enganchados y, para que sean concoloreados, es imprescindible que sean concoloreados los vértices S_1 y S_2, a los cuales pasan S_4 y S_7. Los estados S_1, S_2 están enganchados y, para que sean concoloreados, es imprescindible que sean concoloreados los vértices S_3 y S_4. Los estados S_3 y S_4 no están enganchados; por lo tanto, pueden ser concoloreados. Coloramos los vértices S_3, S_4 con un mismo color. Entonces, según la propiedad transitiva de la relación de concoloración obtenemos que cada uno de los subconjuntos $K_0 = 7\{S_1, S_2, S_8\}$, $K_1 = \{S_3, S_4, S_7\}$, $k_2 = \{S_5, S_6\}$ se compone de los vértices concoloreados.

Para la coloración hallada del grafo de enganche del segundo componente de descomposición, los estados S_2, S_7 son no concoloreados. Por consiguiente, está también liquidada la segunda contradicción que condiciona el carácter indeterminado del grafo de transiciones del segundo factor. En definitiva obtenemos las siguientes funciones de excitación del segundo componente de descomposición: $\varphi_{200} = 0 \vee 1 \vee 2$, $\varphi_{201} = 3 \vee 8$, $\varphi_{202} = 5$, $\varphi_{210} = 6 \vee 7 \vee 10$, $\varphi_{211} = 0 \vee 2 \vee 5$, $\varphi_{212} = 1$, $\varphi_{220} = 6 \vee 9$, $\varphi_{221} = 4 \vee 8$, $\varphi_{222} = 10$.

De este modo, tenemos la descomposición inconexa del dispositivo automático prefijado que se determina por los sistemas obtenidos y la coloración de dos componentes de la forma $S_1 — (1, 0)$, $S_4 — (0, 1)$, $S_7 — (2, 1)$, $S_2 — (0, 0)$, $S_5 — (1, 2)$, $S_8 — (2, 0)$, $S_3 — (1, 1)$, $S_6 — (0, 2)$.

En el caso general, para construir la descomposición abstracta paralela de la conexión absolutamente minimal, es necesario estimar cada coloración por el primer componente mediante las coloraciones por el segundo

Tabla 5.14

x_i	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
0	S_2			S_4				
1		S_2	S_6					
2		S_1					S_3	
3	S_4	S_3		S_3				
4						S_3		
5			S_3					S_5
6				S_1		S_1	S_2	
7			S_2			S_7	S_1	
8	S_4				S_4		S_7	
9					S_8			
10				S_8	S_5			

y elegir una coloración de componentes múltiples que satisfaga las cantidades prefijadas de vértices de los grafos de factores y sus condiciones de conexión. La descomposición del grafo de transiciones en n componentes es análoga.

Examinemos la descomposición abstracta paralela límite de los dispositivos automáticos cuando el dispositivo subatomático es un elemento de memoria. La semántica de esta descomposición será semántica de la conexión funcional de los elementos de memoria. Teniendo en cuenta la estructura de los grafos casi completos y el carácter de dos signos de la lógica de Boole, la semántica reflexiva de la conexión funcional de los elementos de memoria del dispositivo automático se determina por la siguiente afirmación.

Teorema 5.5. *Los grafos de enganche que no contienen ciclos de longitud impar determinan la codificación, en la cual los elementos de memoria son funcionalmente inconexos.*

Este criterio permite determinar sucesivamente los valores de los órdenes en los códigos de estados interiores de modo análogo a cómo se hacía durante la búsqueda de la descomposición abstracta paralela.

§ 5.5. Caracterización y métodos del emplazamiento óptimo de los datos en la memoria del ordenador

Los sistemas modernos de información se caracterizan no sólo por grandes capacidades, sino también por la complejidad de los datos almacenados, la que consiste en que los datos están en diferentes interrelaciones. De tal modo, los datos complejos se representan en forma de un juego de ciertos objetos elementales y un conjunto de relaciones que unen los objetos de datos. En otras palabras, los sistemas complejos de información se formali-

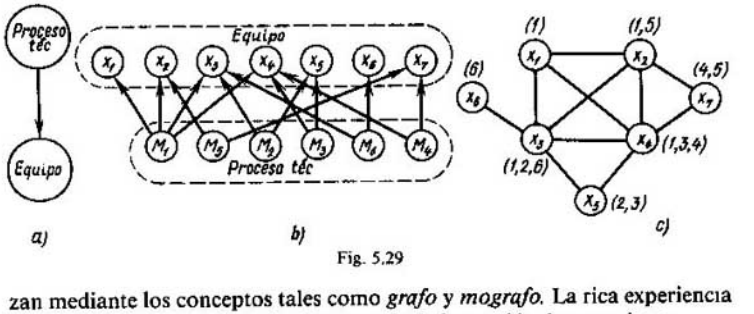


Fig. 5.29

zan mediante los conceptos tales como *grafo* y *mografo*. La rica experiencia práctica de construcción de sistemas de información lo corrobora.

A menudo surge la necesidad de almacenar estructuras de grafos en "forma pura", por ejemplo, cuando en las bases de datos se usan los modelos de datos basados en grafos. Los objetos de datos se almacenan separados de sus relaciones que se representan por grafos. Se conocen varios procedimientos de prefijación de los grafos: empleando matrices de incidencias y de adyacencia, enumerando entornos de los vértices. Se puede mostrar que el último procedimiento es el más ahorrativo para los grafos de grandes dimensiones, lo que es típico para la práctica. Pero la prefijación del grafo mediante la enumeración de entornos es equivalente a la prefijación del mografo, cuyo portador es el del grafo y las palabras son los entornos de sus vértices. La prefijación del grafo puede tener variantes, pero en cualquier caso un mografo puede ser una abstracción de representación. Por ejemplo, en las bases de datos que parten de un modelo de la red de datos (un fragmento del esquema de la red de datos se refleja en la fig. 5.29, *a*), la abstracción de los datos es un grafo orientado. Tratando las demandas, la búsqueda de información se realiza en el sentido indicado por los arcos (de los datos sobre los procesos a los de equipo), por esta razón hace falta almacenar solamente los entornos positivos (los del nivel inferior del grafo dado en la fig. 5.29, *b*). Esta información se da por el mografo representado en la fig. 5.29, *c*.

Como se ha mostrado anteriormente, el mografo es una abstracción del sistema de búsqueda informativa con un conjunto fijado de demandas. En calidad de otro ejemplo de la representación de un sistema informativo por un mografo sirve una organización de ficheros con varias claves de acceso. El fichero es una sucesión de inscripciones compuestas de campos idénticos (las incripciones pueden ser de longitud desigual). Llámase *clave* un campo o conjunto de campos, cuyos valores identifican las inscripciones. El acceso al fichero se realiza indicando el valor de la clave. Para acelerar el procesamiento de las demandas se organizan índices (tablas en las cuales para cada valor de la clave se indican las direcciones de las inscripciones con este valor). Si el índice almacena las direcciones de todas las inscripciones con el valor dado, esta organización se denomina *listas invertidas*. La información almacenada en las listas invertidas se representa por un mografo, cuyo portador se compone de un conjunto

dirección	Nombre y apellido	Título	Datos de salida			Palabras clave	
x_1	A.A. Samarski	Teoría de esquemas en diferencias	M	Nauka	1977	Métodos matemáticos	
x_2	G.I. Marchuk	Métodos de la matemática de cálculos	M	Nauka	1977	Métodos matemáticos, simulación matemática	
x_3	I.M. Makárov (red.)	Fundamentos de la automatización del control de la producción	M	Vischaya shkola	1983	Métodos matemáticos, procesos de producción, automatización	
x_4	Swamy M., Thulasiraman K.	Grafos, redes, algoritmos	M	Mir	1984	Métodos matemáticos, modelos de la teoría de grafos, algoritmos sobre grafos	
x_5	Breuer M.	Teoría y métodos de automatización de la proyección de cálculo	M	Mir	1977	Automatización, algoritmos sobre grafos	
x_6	V.V. Rzhevski	Procesos de trabajo a cielo	M	Nedra	1978	Procesos de producción	
x_7	Peterson J.	Teoría de redes de petri y simulación de sistemas	M	Mir	1984	Simulación matemática, modelos de la teoría de grafos	

Fig. 5.30

de las direcciones de inscripciones y las palabras, de los conjuntos de las direcciones de inscripciones que tienen valores idénticos de la clave.

Examinemos un fichero de un sistema informativo de biblioteca (fig. 5.30) que tiene varias claves de acceso: el apellido del autor, el nombre de la Editorial, la palabra clave, etc. Para acelerar el acceso se puede ordenar el fichero por una de las claves (habitualmente, por el apellido). Por otras claves, las inscripciones estarán completamente desordenadas. En el ejemplo a examinar, el índice por la clave del acceso "palabra clave" se representa por el mografo dado anteriormente (véase fig. 5.29, *c*), a la palabra M_1 le corresponde el valor "métodos matemáticos", a la M_2, "automatización", etc.

El mografo puede prefijar tanto las listas invertidas, como otras organizaciones de lista para los índices: listas múltiples, listas de secciones. En fin, una matriz binaria sencilla puede representarse como la matriz de incidencia del mografo.

Para el emplazamiento de los datos en la memoria del ordenador los criterios principales son la minimización de la capacidad de memoria y la del tiempo de acceso. Los elementos del portador del mografo corresponden unívocamente a los objetos de los datos almacenados en la memoria. Por lo tanto, el criterio de la minimización de la capacidad de memoria determina la funcional de la calidad $\varphi(\Psi_b)$, en la equivalentización

semántica, como el mínimo de la potencia del portador Ψ_b. El mografo Ψ_b determina el emplazamiento, en el cual se puede hallar todas las palabras lo más posible. Si el mografo Ψ_a no admite este emplazamiento, la búsqueda de cierta palabra es equivalente a la de varias palabras que significa la desintegración de la palabra dada en varias palabras. De tal modo, el criterio de minimización del tiempo de acceso determina la funcional de la calidad $\varphi(\Psi_b)$ como el mínimo de la potencia de la signatura Ψ_b.

En los ejemplos considerados de la organización de los datos representados por el mografo es importante minimizar la capacidad de memoria en condiciones del tiempo mínimo de acceso. Es posible el criterio inverso: la minimización del tiempo de acceso contando con la capacidad constante de memoria. Por ejemplo, es importante en el problema de una ordenación de las inscripciones del fichero (fig. 5.31), con la cual se realizaría más rápido la búsqueda por la clave.

El acceso a los objetos de datos se realiza con ayuda de un procedimiento estándar de búsqueda, en la cual se cumple la transición de un elemento de memoria a otro. La transición se realiza unívocamente, por eso se puede formalizar este procedimiento de búsqueda mediante una función de examen de la memoria S que es una función parcial sobre el conjunto de los elementos del portador de un mografo $S\colon X \to X$; $S(x)$ es un elemento, al cual se realiza la transición después del elemento x. Analicemos tal emplazamiento de los datos y tal función de examen de la memoria S (modelo Ψ_b), para los cuales existe un elemento $x_0 \in M$ tal que

$$M = \{x_0,\ S(x_0),\ S^2(x_0),\ \ldots,\ S^{|M|-1}(x_0)\}$$

para cada palabra M del modelo Ψ_b, es decir, cada palabra se busca con ayuda de la función S basándose solamente en la información de la potencia de la palabra y del elemento inicial x_0.

Semejantes mografos se denominan *admisibles*. Es obvio que en la práctica la mayoría de los mografos no son admisibles. Para su realización en la memoria del ordenador se necesita desintegrar los elementos del portador o las palabras. Al mismo tiempo, se aumenta ora la capacidad de memoria, ora el tiempo de acceso. En la memoria del ordenador, los mografos admisibles se representan de modo sin exceso y requieren el tiempo mínimo de acceso.

De tal modo, el problema del emplazamiento óptimo de los datos consiste en la transformación del mografo en el admisible y en la construcción de la función de examen de la memoria. Con ello, la funcional de la calidad es la extensión minimal del portador sin cambiar la signatura o la extensión minimal de la signatura sin cambiar el portador. Este problema puede interpretarse por grafos. Consideremos la función de examen de la memoria $S\colon X \to X$ de un mografo admisible Ψ_b como la relación de adyacencia $S \subseteq X \times X$ de los vértices en el grafo orientado $G_f = \langle X, S\rangle$ construido

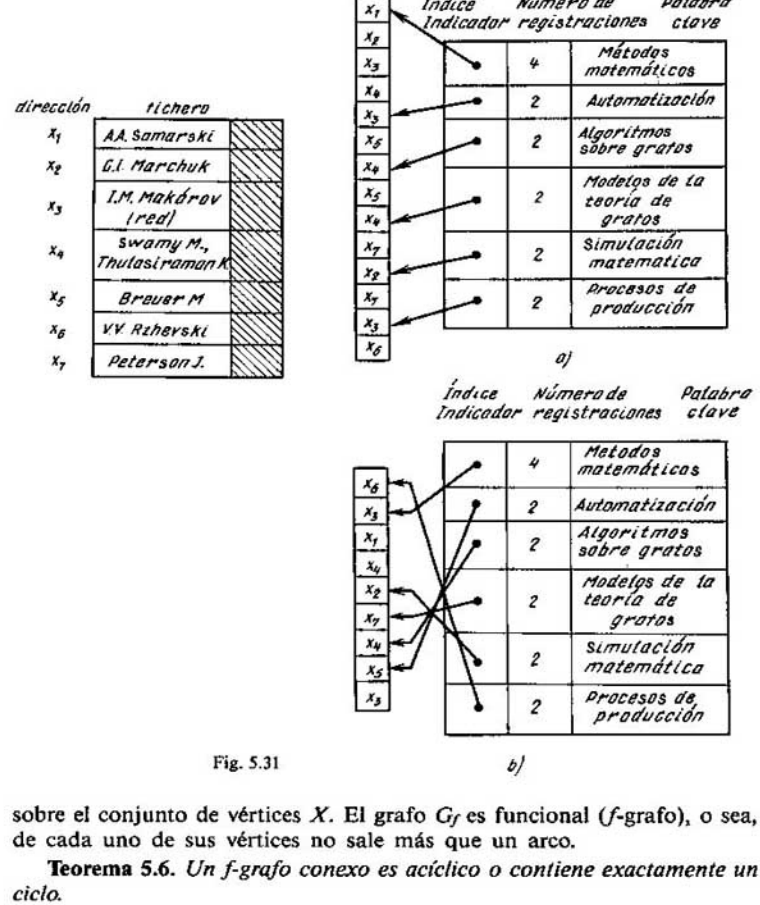


Fig. 5.31

sobre el conjunto de vértices X. El grafo G_f es funcional (f-grafo), o sea, de cada uno de sus vértices no sale más que un arco.

Teorema 5.6. *Un f-grafo conexo es acíclico o contiene exactamente un ciclo.*

De esta afirmación se desprende que en la práctica son importantes las siguientes clases de f-grafos y mografos admisibles que se representan por los f-grafos correspondientes: lineales (caminos), cíclicos (circuitos), acíclicos (árboles orientados).

En la práctica, la función de examen de la memoria se realiza habitualmente empleando las marcas o mediante la transición al elemento adyacente

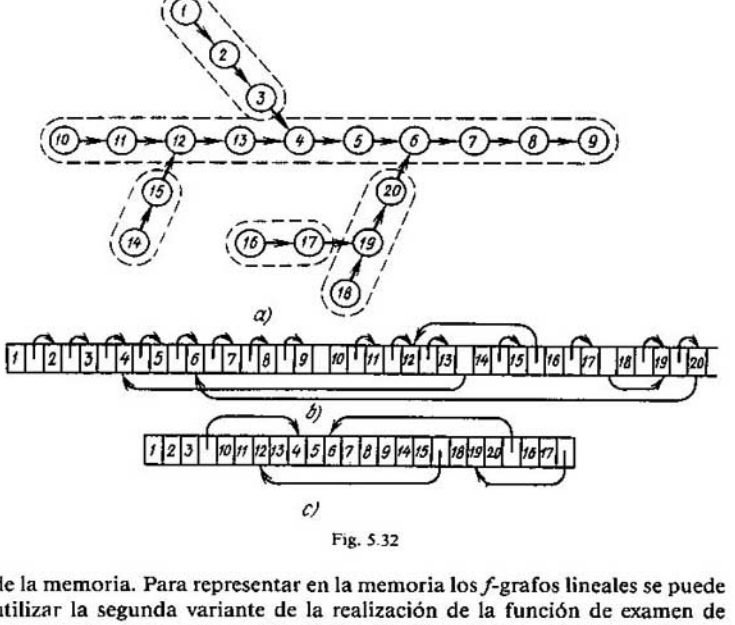


Fig. 5.32

de la memoria. Para representar en la memoria los *f*-grafos lineales se puede utilizar la segunda variante de la realización de la función de examen de la memoria. La representación de los *f*-grafos cíclicos se basa también en la transición al elemento adyacente de la memoria, excepto $S(x_n) = x_1$, donde x_1, x_n son los elementos primero y último, respectivamente, en el emplazamiento. Para representar los *f*-grafos acíclicos son necesarias las marcas. Sin embargo, la representación de un *f*-grafo acíclico mediante los pares $(x, S(x))$ para cada vértice x es excedente (fig. 5.32, *a*, *b*). Para la representación sin exceso, partamos el *f*-grafo en fragmentos lineales, dentro de los cuales emplearemos como la función de examen la transición al elemento adyacente de la memoria e indicaremos la relación entre los fragmentos mediante las marcas (fig. 5.32, *c*).

Para resolver los problemas de caracterización de la prefijación de los mografos por *f*-grafos de diferentes clases, introduzcamos relaciones de subordinación. Un mografo Ψ_1 se subordina a otro Ψ_2 en cuanto a una relación de subordinación P_s^1 si se obtiene del Ψ_2 mediante una sucesión de limitaciones, contracciones, extensiones y convoluciones. Como una limitación del mografo se comprende la eliminación de algunas de sus palabras, como una contracción se comprende la eleminación de unos elementos del

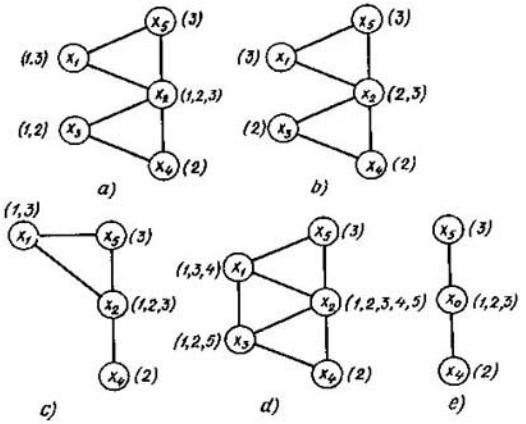


Fig. 5.33

portador, como una extensión se comprende la introducción de una palabra nueva que es la intersección de las ya existentes, como una convolución se comprende el encolamiento de todos los vértices de cierta palabra con la unión de sus pesos. La figura 5.33 (*a, b, c, d, e*) ilustra las operaciones introducidas. La relación de subordinación P_s^1 se usa para caracterizar mografos lineales y acíclicos.

La relación de subordinación P_s^2, salvo las operaciones usadas en P_s^1, incluye otra operación: la adherencia de la palabra, es decir, su sustitución por el complemento en el conjunto de los elementos del portador del

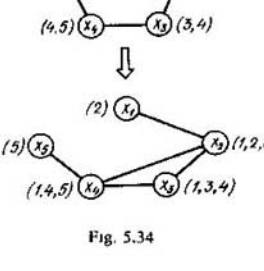


Fig. 5.34

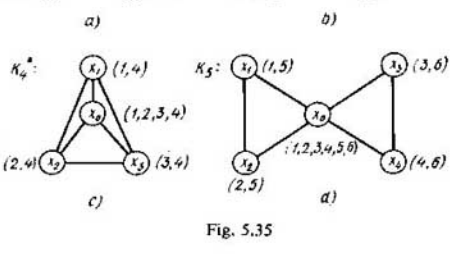


Fig. 5.35

mografo (fig. 5.34). Además, impone la siguiente restricción sobre la operación de extensión P_s^2: se puede incluir solamente aquella palabra M que es la intersección de palabras M_i, M_j tales que su unión no forma todo el portador del mografo (la extensión posible). Esta relación de subordinación se usa para caracterizar los mografos cíclicos.

El principio de localidad se cumple para las propiedades de linealidad y de aperiodicidad cuando se tiene la relación P_s^1 y para las propiedades de periodicidad cuando se tiene la relación P_s^2.

Teorema 5.7. (teorema de V. L. Tórjov). *Para las clases de admisibilidad de los mografos las figuras prohibidas son los siguientes mografos:* 1) S_3 *y* K_4, *para la propiedad de linealidad y para la relación de subordinación* P_s^1; 2) K_4, *para la propiedad de periodicidad y para la relación de subordinación* P_s^2; 3) S_3, K_4^*, K_5, *para la propiedad de aperiodicidad y para la relación de subordinación* P_s^1.

En las fig. 5.35 (*a*, *b*, *c*, *d*) se aducen los mografos S_3, K_4, K_4^*, K_5.

Los precedimientos de transformación de estas figuras prohibidas en las permitidas consisten o sea en la desintegración de un elemento del portador x y la correspondiente partición del conjunto de las palabras $E(x)$, que lo comprendían, en dos conjuntos $E_1(x)$ y $E_2(x)$ (designaremos este procedimiento mediante $x(E_1, E_2)$), o sea en la desintegración de la palabra M_i en dos M_i' y M_i'' con la correspondiente distribución de los elementos por estas palabras (lo designaremos mediante $i\ (M_i', M_i'')$). Los procedimientos de la transtormación de las figuras prohibidas en las designaciones aceptadas se unen en la tabla 5.15.

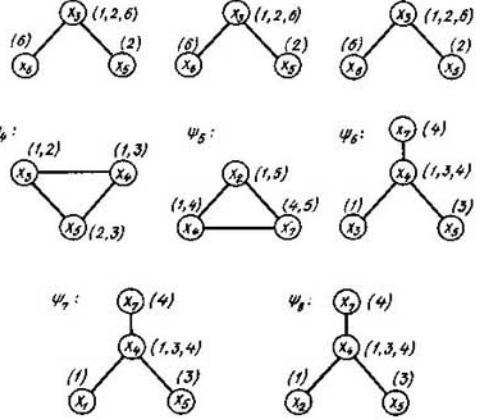


Fig. 5.36

Tabla 5.15

Figura prohibida	Procedimiento de transformación	
	extensión del portador	extensión de la signatura
S_3	$x_1(2, 3)$ $x_2(1, 3)$ $x_3(1, 2)$	$1(x_2, x_3)$ $2(x_1, x_3)$ $3(x_1, x_2)$
K_4	$x_0(3, (1, 2))$ $x_0(2, (1, 3)$ $x_0(1, (2, 4))$	$1(x_0, x_1)$ $2(x_0, x_2)$ $3(x_0, x_3)$
K_4^*	$x_1(1, 4)$ $x_2(2, 4)$ $x_3(3, 4)$ $x_0(1, (2, 3, 4))$ $x_0(2, (1, 3, 4))$ $x_0(3, (1, 2, 4))$	$1(x_1, x_0)$ $2(x_2, x_0)$ $3(x_3, x_0)$ $4(x_1, x_2, x_3, x_0))$ $4(x_2, (x_1, x_3, x_0))$ $4(x_3, (x_1, x_2, x_0))$
K_5	$x_1(1, 5)$ $x_2(2, 5)$ $x_3(3, 6)$ $x_4(4, 6)$ $x_0(1, (2, 3, 4, 5, 6))$ $x_0(2, (1, 3, 4, 5, 6))$ $x_0(3, (1, 2, 4, 5, 6))$ $x_0(4, (1, 2, 3, 5, 6))$	$1(x_1, x_0)$ $2(x_2, x_0)$ $3(x_3, x_0)$ $4(x_4, x_0)$ $5(x_3(x_0, x_2))$ $5(x_2(x_0, x_1))$ $6(x_3(x_0, x_4))$ $6(x_4(x_0, x_3))$
	$x_0(1, 2, 5), (3, 4, 6))$	

Se puede mostrar que estos procedimentos son básicos, o sea, cualquier otro procedimiento de transformación es una superposición de estos procedimientos. Para el modelo en total, los procedimientos dados de las figuras prohibidas no son unívocos. La equivalentización semántica de un mografo Ψ_a en un mografo Ψ_b con las propiedades dadas de admisibilidad se realiza con ayuda de un procedimiento habitual: construimos la tabla semántica; hallamos los cubrimientos; estimamos estos cubrimientos construyendo y colorando grafos especiales. Como resultado obtenemos un mografo que posee la propiedad dada de admisibilidad. Según ella, construimos el *f*-grafo correspondiente. Consideremos más detalladamente el algoritmo de la construcción de un *f*-grafo lineal según un mografo lineal (aceptemos que el mografo es conexo).

Determinemos la relación de subordinación P_E sobre el portador de un mografo que $(x_i, x_j) \in P_E$, si $E(x_i) \subset E(x_j)$ (al mismo tiempo, no consideremos las palabras de un elemento). Hallemos el conjunto de elementos minimales X_1 de la relación de subordinación P_E. En él dejemos un elemento de cada uno de aquellos que integran las palabras iguales y, después, solamente tales elementos x_i, cuya eliminación junto con $E(x_i)$ no hace inconexo el mografo. (Se puede mostrar que siempre no hay más de dos elementos de este tipo). Sea que se queden los elementos x_i y x_n. Fijemos uno de ellos, por ejemplo, x_n, como un vértice final del f-grafo. Eliminemos otro elemento x_i del mografo y lo introduzcamos en el f-grafo. Si el f-grafo ya tiene vértices, unamos el anterior vértice introducido x_j con x_i por medio de un arco. Continuemos realizando este procedimiento hasta que en el mografo se quede un vértice x_n. Lo tratamos de modo análogo.

Examinemos el proceso de la equivalentización semántica del mografo Ψ_a (véase la fig. 5.29, *c*) en un f-grafo lineal. Las figuras, prohibidas para la propiedad de linealidad, presentes en Ψ_a, se dan en la fig. 5.36. Si el criterio es la minimización de la funcional $\varphi(\Psi_b)$ igual a la potencia del portador Ψ_b, bajo la condición de no incremento de la potencia de la signatura Ψ_a, se puede aplicar sólo la transformación basada en la desintegración de los elementos del portador. La tabla semántica tiene forma (tabla 5.16):

Tabla 5.16

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	
1	1	1	1					$x_3(1, (2, 6))$
1	1	1	1					$x_3(2, (1, 6))$
1	1	1						$x_3(6, (1, 2))$
			1					$x_3(1, 2)$
			1					$x_3(2, 3)$
			1					$x_4(1, 3)$
				1				$x_2(1, 5)$
				1				$x_4(1, 4)$
				1				$x_7(4, 5)$
			1	1	1	1	1	$x_4(1, (3, 4))$
			1		1	1	1	$x_4(3, (1, 4))$
				1	1	1	1	$x_4(4, (1, 3))$

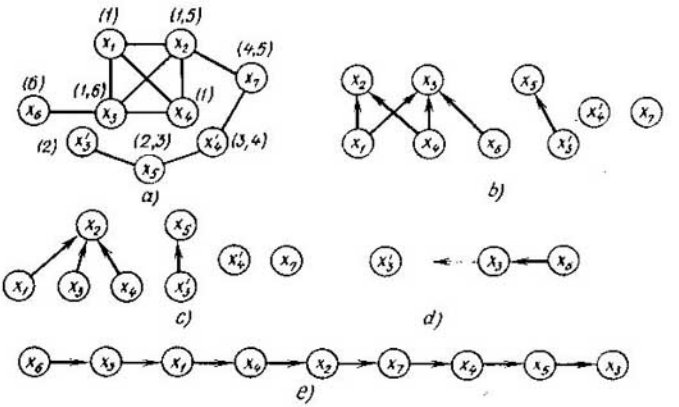


Fig. 5.37

Examinemos el cubrimiento $\pi = \{x_3(2, (1, 6)), x_4(1, (3, 4))\}$. El cumplimiento de estas transformaciones en Ψ_a conducirá al mografo lineal Ψ_b (fig. 5.37, *a*). Construimos según el algoritmo propuesto, un *f*-grafo lineal que representa Ψ_b. Definamos la relación de subordinación P_E (fig. 5.37, *b*). Sus elementos minimales son x_1, x_4, x_6, x_3'. Eliminando de la consideración x_1 ó x_4, con la palabra M llegamos al mografo inconexo. Fijamos el elemento x_3' como el vértice final del *f*-grafo. En el *f*-grafo introducimos el vértice x_6, eliminándolo de Ψ_b. Luego, volvemos a construir la relación de ordenación P_E (fig. 5.37, *c*). Sus elementos minimales son x_1, x_3, x_4, x_3'. Los tres primeros integran un conjunto de palabras; escogemos el elemento x_3 y eliminamos los demás de la consideración. Introducimos x_3 en el *f*-grafo (fig. 5.37, *d*). Continuando este procedimiento, construimos el *f*-grafo (fig. 5.37, *e*).

El mografo Ψ_a representa un sistema de listas invertidas para el fichero de un sistema informativo de biblioteca (véase la fig. 5.30). Si empleamos la organización normal de lista con la función lineal de examen, las listas invertidas (véase la fig. 5.31, *a*) ocupan 14 elementos de la memoria; si

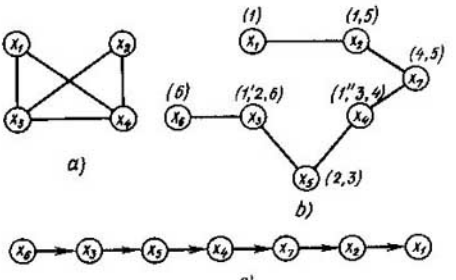


Fig. 5.38

empleamos el emplazamiento óptimo que representa Ψ_b (véase la fig. 5.31, *b*) se ocupan 9 elementos. De tal modo, el ahorro de la memoria sobre las listas invertidas aproximadamente es igual al 35%.

Si el criterio es la minimización de la funcional $\varphi(\Psi_b)$, igual a la potencia de la signatura Ψ_b bajo la condición de no aumento de la potencia del portador Ψ_a, se puede aplicar sólo las transformaciones de las figuras prohibidas que desintegran las palabras. La tabla semántica tiene forma (tabla 5.17):

Tabla 5.17

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	
1								$1(x_1, x_3)$
1	1	1	1					$2(x_3, x_5)$
1	1	1						$6(x_3, x_8)$
	1							$1(x_2, x_3)$
		1	1		1			$1(x_3, x_4)$
			1		1	1	1	$3(x_4, x_5)$
				1			1	$1(x_2, x_4)$
					1	1	1	$4(x_4, x_7)$
				1				$5(x_2, x_7)$
						1		$1(x_1, x_4)$

Uno de los cubrimientos que determinan una solución minimal es el cubrimiento no minimal (según el número de transformaciones) $\pi = \{1(x_1, x_3), 1(x_2, x_3), 1(x_3, x_4), 1(x_2, x_4), 1(x_1, x_4)\}$. Un grafo especial para la palabra M (todos los procedimientos desintegran sólo esta palabra) se da en la figura 5.38, *a*. Su coloración con tres colores determina la desintegración minimal M_1: $M_1' = \{x_1, x_2\}$, $M_1'' = \{x_3\}$, $M_1''' = \{x_4\}$; después de esto el mografo se hace lineal (fig. 5.38, *b*) y se representa mediante el *f*-grafo lineal (fig. 5.38, *c*).

La solución de este problema permite, conforme al *f*-grafo construido, ordenar las inscripciones del fichero del sistema informativo de biblioteca (fig. 5.39) de tal modo que las inscripciones con los valores idénticos de la palabra clase se agrupan en el número mínimo de cadenas. Si en el fiche-

Fig. 5.39

ro inicial(fig. 5.30) había 10 cadenas de este tipo (para la palabra clave "métodos matemáticos" se tiene 1 cadena, para la palabra clave "automatización", 2 cadenas, etc.), en el emplazamiento obtenido (fig. 5.39) hay 8 cadenas de este tipo (para la palabra clave "métodos matemáticos" se tiene 3 palabras, para las demás, una para cada una). De este modo, como resultado de la optimación durante el procesamiento del fichero, la acción rápida aumentó en el 20%. Para ambos criterios se ha obtenido la solución minimal.

§ 5.6. Problemas y ejercicios

5.1. Determinar la densidad de trabajo y la complejidad capacitiva del algoritmo de la equivalentización sintáctica de un grafo no orientado en el de dos partes mediante la eliminación de aristas, si la funcional de la calidad es el mínimo de las aristas eliminadas.

5.2. Comprobar el cumplimiento del principio de localidad para el problema de caracterización de la transformación de grafo en uno de dos partes y para la relación de subordinación "ser subgrafo" (recordemos que un subgrafo se diferencia de un subgrafo parcial en que si no tiene algún vértice del grafo, no tiene aristas que le son incidentes en el grafo). ¿Forman un conjunto de figuras prohibidas los ciclos de longitud impar?

5.3. Determinar una relación de subordinación que satisface el principio de localidad para el problema de caracterización de los grafos de Hamilton.

5.4. Determinar una relación de subrodinación que satisface el principio de localidad para el problema de caracterización de los grafos de Euler.

5.5. Proponer algoritmos de la equivalentización sintáctica, heurística y semántica de los grafos no orientados en los de Euler. Comparar la densidad de trabajo y la complejidad capacitiva de algoritmos.

5.6. Cumplir la equivalentización semántica de un grafo G_1, que es el complemento del grafo dado en la fig. 5.4(b), en el de dos partes $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ para los siguientes procedimientos de transformaciones de las figuras prohibidas en las permitidas y de las funcionales de la calidad: a) eliminación de una arista de un ciclo impar, $\varphi(G_2) = \max|U_2|$; b) desintegración de un vértice de un ciclo impar, $\varphi(G_2) = \min |V_2|$.

5.7. Demostrar que al eliminar las filas y columnas que se absorben (véase el § 5.2), lo que se emplea para disminuir la densidad de trabajo para hallar el cubrimiento de la tabla semántica la solución minimal no se pierde.

5.8. Determinar si son inestables las figuras prohibidas los tipos A y E, presentes en el mografo dado en la fig. 5.10, *a*.

5.9. Demostrar que la solución del problema de la minimización teórica y estructural de la función

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15)$$

por medio de un procedimiento propuesto en el § 5.4 y basado en la funcional (5.1) es absolutamente minimal.

5.10. Demostrar que la solución del problema de la minimización teórica y estructural del sistema de funciones booleanas, dado por la tabla 5.12, mediante el procedimiento propuesto en el § 5.4 y basado en la funcional (5.2), es absolutamente minimal.

5.11. Determinar la descomposición paralela abstracta del dispositivo automático (véase la fig. 5.24, *a*), partiendo de la construcción del segundo dispositivo subautomático (que tiene cuatro estados). ¿Cambia el resultado de la descomposición?

5.12. Cumplir la equivalentización semántica del mografo Ψ_a (véase la fig. 5.30, *c*) en el cíclico Ψ_b con la funcional de la calidad (el mínimo de las desintegraciones) y mediante los siguientes procedimientos de la transformación de las figuras prohibidas en las permitidas: a) desintegración de un elemento del portador, b) desintegración de una palabra.

Comentarios

La lucha contra el sondeo de variantes en la solución de los problemas de la matemática discreta es uno de los más actuales del apoyo matemático moderno de los sistemas de tratamiento de la información. Se puede lograr éxito, sólo resolviendo el problema de caracterización de las transformaciones modelo en realización. Si el problema de caracterización no está resuelto se usa el enfoque heurístico de la optimación de los algoritmos combinatorios.

Bibliografía

Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman. The design and analysis of computer algorithms, Reading, Mass., USA, 1976.

S. E. Goodman, S. T. Hedetniemi., Introduction to the design and analysis of algorithms, New York, 1977.

Michael R. Garey, David S. Johnson., Computers and Intractability, San Francisco, 1979.

Edward Minieka., Optimization algorithms for networks and graphs, New York — Basel, 1978.

Views on general systems theory, New York — London — Sydney, 1964.

Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo., Combinatorial algorithms, Englewood Cliffs, N. J., 1977.

M. N. S. Swamy, K. Thulasiraman., Graphs, networks and algorithms, New York etc.

Горбатов В. А., Павлов П. Г., Четвериков В. Н., Логическое управление информационными процессами. — М.: Энергоатомиздат, 1984. (V. A. Gorbátov, P. G. Pávlov, V. N. Chetverikov., Gestión lógica de los procesos de información).

Левин Д. Я., Язык сверхвысокого уровня СЕТЛ и его реализация. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1983. (D. Ya. Levin., Lenguaje de nivel superalto SETL y su realización).

Мальцев А. И., Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. (A. I. Máltsev., Sistemas algebraicos).

C. Berge, M. Las Vergnas., Sur un theoreme du type König pour hipergraphes, Ann. V. Y. Acad. Sci., 1975, № 1, 1970.

D. Hilbert, P. Bernays., Grundlagen der Mathematik, Berlin, 1968.

Новиков П. С., Конструктивная математическая логика и точки зрения классической. — М.: Наука, 1977. (P. S. Nóvikov, Lógica matemática constructiva desde el punto de vista de la lógica clásica).

Автоматизация проектирования сложных логических структур/Под ред. В. А. Горбатова. — М.: Энергия, 1978 (Automatización de proyección de las estructuras lógicas complejas. Dirigido por V. A. Gorbátov).

Горбатов В. А. Семантическая теория проектирования автоматов. — М.: Энергия, 1979 (V. A. Gorbátov, Teoría semántica del diseño de los dispositivos automáticos).

Горбатов В. А., Кафаров В. В., Павлов П. Г., Логическое управление технологическими процессами. — М.: Энергия, 1978 (V. A. Gorbátov, V. V. Kafárov, P. G. Pávlov., Gestión lógica de los procesos tecnológicos).

Горбатов В. А., Останков Б. Л., Фролов С. А., Регулярные структуры автоматного управления/Под ред. В. А. Горбатова. — М.: Машиностроение, 1980 (V. A. Gorbátov, B. L. Ostánkov, S. A. Frolov., Estructuras regulares del control de autómata. Dirigido por V. A. Gorbátov).

Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Синтез управляющих автоматов. — М.: Энергия, 1978 (V. G. Lázarev, E. I. Piil., Síntesis de los dispositivos automáticos de mando).

Поспелов Д. А., Логико-лингвистические модели в системах управления. — М.: Энергия, 1981 (D. A. Pospélov. Modelos lógicos y lingüísticos en los sistemas de mando).

Зыков А. А., Основы теории графов, — М.: Наука, 1987 (A. A. Zýkov., Fundamentos de la teoría de los grafos).

Índice alfabético de materias

Acopio 254
— vacío 254
álgebra 16
— de Boole 30
— — conjuntos (de Cántor) 18
— — relaciones 35
— relacional 38
álgebras isomorfas 30
algoritmo 51, 135
altura del elemento de un conjunto ordenado 24
anillo 18
arco de cierrre transitivo 21
argumento (variable) de una función 13
autómata (dispositivo automático)
— asincrónico 188
— finito 186
— de mando 185
— — microprogramas 216
— — Myhill 184
— jerárquico 185
— operacional 189
— síncrónico 188

Base 66
— conexa 244
— funcional 234
— inconexa 244
— topológica 234

Cadena 24
— deductiva 184
— simple 108
— no intersecante por aristas 112
— — — — vértices 112
cálculo
— de enunciaciones 85, 86
— de predicados 91
— — — estrecho 94
— — — extendido 94
camino 113
— completo 113
— compuesto 113
— simple 113
campo 18
— de definición de una función 13
— — valores de una función 13
casi densidad 165
ciclo
— de Euler 111
— de Hamilton 111
cifra 196
circuito 113
clase
— cromática 157
— de equivalencia 25
— — las funciones booleanas
— — — — — autoduales 68
— — — — — lineales 67
— — — — — monótonas 68
— — — — — que conservan la constante 0 67
— — — — — — — — — 1 67
coálgebra 240
— de los grafos 240
código
— código
— complementario 199
— directo 198
código inverso 199
codificación
— de Aiken-Emeriax 202
— — estados interiores 226
— — frecuencias y matrices de estados interiores 227
— — Stibitz 202
— en restos 204
— vecina de estados interiores 231
coloración
— de aristas 157
— de vértices 155
combinación en par 130
— máxima en par 130
— perfecta en par 130
componente
— de conexión
— — — fuerte 114

conexión
— por aristas 112
conjunto 11
— cociente 19, 20
— finito 11
— ordenado 22
— linealmente ordenado 22
— parcialmente ordenado 22
— vacío 11
conjuntos equivalentes 12
— ordenados isomorfos 24
constituyente 43
— co-operación 240
corte 113
cota
— inferior 23
— — máxima 25
cota superior 23
— — mínima 25
cuantificador
— existencial 92
— universal 92
cubrimiento 49, 128
cuerda 117
cuerpo 18

Densidad 134
derivada
— de un grafo 122
— — orden k de una función booleana 76
— — primer orden de una función booleana 75
— — una función booleana 75
— mixta de una función booleana 76
— en tiempo 250
descomposición de Shannon 59
diagrama
— de Euler 12
— de Hasse 22
diámetro de un grafo 110
dispositivo automático (véase *autómata*)
distancia 110

Elemento 11
— comparable 23
— complementario 28
— maximal 23
— máximo 23
— minimal 23
— mínimo 23
— neutral 16
— — bilateral 16
— — derecho 16
— — izquierdo 16
elemento unidad 16
entorno 102, 131
— de radio unidad de un elemento (sección) 20
enunciación 56
— falsa 56
— verdadera 56
espacio 12
— booleano 144
— de ciclos de un grafo 116
— n-dimensional 116
espesor 142
estado de un dispositivo automático 182
— enganchado 312
— equivalente 213
— inestable 231
— no encadenado 220
— pseudoequivalente 224

Familia de un conjunto (booleano) 12
fase
— de una variable 88
forma
— normal
— — abreviada de Cantor 48
— — conjuntiva (FNCj) de una función
— — — perfecta 61
— — de Cantor 47
— — disyuntiva de una función
— — — abreviada 62
— — — perfecta 58
— — — tope 64
— — minimal de Cantor 47
— — paréntesis 51
— — perfecta de Cantor 47
— — tope de Cantor 49
frecuencia
— de orden k 127
— recíproca 122, 127
— propia 122, 127
función 13
— booleana 57
— — débilmente definida 62
— — residual 65
— completamente definida 13
— de una lógica de k signos 87
— n-ádica 14
— parcialmente definida (incompletamente definida) 13

Género
— de un grafo 141
— de una superficie 141
grafo 19
— casi completo 165, 168
— completo 33
— conexo 112
— fuertemente conexo 113
— no fuertemente conexo 114
— cubicable 145
— de borrado 225
— de dos partes 34, 119
— de encadenamiento 220
— de tipo $\pi\sigma$ 241
— de transiciones 205
— hamiltoniano 111
— homeomorfo 141
— isomorfo 105
— lineal 248
— parcial 21, 102, 276
— planar 141
— ponderado 102
— reducible 276
— regular 112
— trivial 111
gramática 181
— de contexto 184
— de un número finito de estados 181
— lineal 185
— metalineal 186
— unilateralmente lineal 186
— sin contexto 185
grupo 17
— de sustituciones (grupo de Galois) 17
grupoide 16
— aditivo 16
— asociativo 17
— conmutativo (abeliano) 17
— idempotente 16
— multiplicativo 16
Hipercubo (cubo n-dimensional) 46

Implicante simple 48, 62
Intervalo 28
— de un conjunto 47
— de una función booleana 62
— maximal de un conjunto 48
— — de una función booleana 62
— nulo de una función booleana 62
— unitario de una función booleana 62
isomorfismo 24, 30

Lazo 21
lenguaje
— con el número finito de estados 182
— automático finito 186
— equivalente 181
letra
— proposicional 86
longitud
— de una cadena 24
— de un camino 113
— — — conjunto ordenado 24
— — — microrayo 218

Matriz
— básica
— — ciclomática 118
— — de cortes (cociclomática) 119
— ciclomática 117
— de adyacencia 19, 105
— — incidencia 32
— — incidencias 105
— — k células 111
— modificada de adyacencia 137
— N-dimensional de frecuencia de relaciones 127
mayorante de un subconjunto 23
microoperación 206
microprograma 207
microrrayo 218
modelo 35
— subordinado 275
modelización de un grafo 33
mografo 34
— lineal 279

No entorno 131
número de un grafo
— arista de la estabilidad exterior 128
— — — independencia 128
— ciclomático 117, 116
— cromático 156
— de cubrimiento arista 128
— — — vértice 128
— vértice de la estabilidad exterior 128
— — negativo de la estabilidad exterior 138
— — positivo de la estabilidad exterior 137
— — — independencia 128

Orden 91
— de un grafo 165

Partición de un conjunto 25
peso de la derivada de una función booleana 78
portador 16
potencia
— de un conjunto 12
— una relación 33
— un vértice 105
problema de caracterización 275
producto
— cartesiano
— — de conjuntos 13
— — de grafos 108
— — parcial 216
— de sustituciones 17

Red 115
— de Petri 254
— marcada de Petri 255
relación 19
— binaria 19
— — de ordenación 21
— — — — estricta 22
— compatible 35
— de equivalencia 25
— de suborden 22
— n-aria 32
— — simétrica (*S*-relación) 32
— reflexiva 20
— simétrica 21
— transitiva 21
retículo 26
— completo 26
— con complementos 29
— de Dedekind (modular) 28
— distributivo 28

Sección 20
semigrupo 17
signatura 16
— completa 88
— independiente 88
— no contradictoria 88
sistema
— de numeración 195
— — — aditivo 196
— — — asimétrico 197
— — — — en sentido negativo 197
— — — — en sentido positivo 197
— — — de la base S 196
— — — de tipo de valores ponderables 196
— — — multiplicativo 196
— — — lógico 196
— — — no posicional 196
— — — posicional 196
— — — simétrico 197
subconjunto 11
— propio 12
subgrafo 33, 102
— bincidente 217
— de esqueleto 117
— parcial 102
— vacío 128
sustitución 181

Tabla
— de distinciones 62
— — Quine (implicante) 49
— — veracidad 57
terma 92
— primaria 43, 58
tipo-ádico de una función 13
tipo-ario de una relación 35
transformación
— equivalente 271
— idéntica 93

Universo 12

Zung 216

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Próximas obras de nuestro sello editorial

V. N. Litvinenko, A. G. Mordkóvich

Prácticas para resolver problemas matemáticos

Algebra y trigonometría

El objetivo de este manual consiste en prestar ayuda concreta a los estudiantes en el desarrollo de los hábitos para resolver problemas matemáticos del curso escolar de álgebra y trigonometría. La presencia del material teórico y ejemplos analizados detalladamente ofrece la posibilidad de utilizar el manual por aquellos que estudian dicho curso individualmente.

K. A. Ríbnikov

Análisis combinatorio

Los matemáticos, ingenieros, así como los especialistas en otras ramas de la ciencia, saben que al solucionar los problemas prácticos con más frecuencia, se ven obligados a ocuparse de las estructuras discretas. Entre éstas citemos grafos, matrices, esquemas-bloque, redes eléctricas, flujos de transporte, sistemas de organización de la producción, flujos de información y muchos otros. Además, como es sabido, el funcionamiento de la mayoría de ordenadores se basa en el principio del cálculo directo.

El presente libro ofrece al lector los fundamentos de esta teoría que mantiene el título históricamente formado, análisis combinatorio.

V. A. Gúsiev, V. N. Litvinenko, A. G. Mordkóvich

Prácticas para resolver problemas matemáticas

Geometría

Este manual se dirige a los estudiantes con el fin de prestarles ayuda concreta en la elaboración y el desarrollo de los conocimientos y hábitos para resolver problemas geométricos según el curso escolar de matemáticas. Contiene material teórico informativo y se examinan ejemplos de resolución de los problemas, lo que permite hacer uso del presente manual para el estudio individual.